

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева

УДК 524.834

На правах рукописи

ЖАДЫРАНОВА АЛИЯ АМИРБЕКОВНА

**Исследование симметрии и решений некоторых нелинейных моделей
теории поля для пространственно-временного многообразия**

6D060400 – Физика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
доцент
К.Р. Мырзакулов

Зарубежный научный руководитель:
PhD,
профессор
Д. Синглетон
(Фресно, США)

Республика Казахстан
Астана, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ	4
ВВЕДЕНИЕ	5
1 СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ ПРИ ОПИСАНИИ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ВСЕЛЕННОЙ	10
1.1 Модели Вселенной, заполненной вязкой тёмной жидкостью.....	13
1.2 Наблюдательные ограничения на модели $f(T)$ гравитации от космических хронометров.....	19
1.3 Теория полного разделения переменных.....	23
2 ВЯЗКОСВЯЗАННЫЕ ЖИДКОСТИ В ТЕРМИНАХ ЛОГАРИФМИЧЕСКИ СКОРРЕКТИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ	27
2.1 Модифицированное уравнение состояния степенной вязкой жидкости с логарифмической коррекцией.....	29
2.2 Вселенная заполнена вязкой связанной жидкостью с логарифмической коррекцией.....	30
2.3 Модель со связующим членом $Q = 3\lambda H(\rho + \rho_1) + \gamma(\dot{\rho} + \dot{\rho}_1)$	32
2.4 Модель взаимодействия с членом связи $Q = 3\alpha H \frac{\rho\rho_1}{(\rho + \rho_1)}$	34
Выводы по второму разделу.....	39
3 РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ H_0 НАПРЯЖЕННОСТИ В $f(T)$ ГРАВИТАЦИИ С ПОМОЩЬЮ БАЙЕСОВСКОГО МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ	41
3.1 Теоретические основы и модели.....	45
3.1.1 Фоновая динамика $f(T)$ гравитации.....	46
3.1.2 $f(T)$ модели.....	54
3.2 Байесовское машинное обучение.....	58
3.3 Реализация Байесовского машинного обучения.....	61
3.3.1 f_1CDM модель.....	63
3.3.2 f_2CDM модель.....	68
3.3.3 f_3CDM модель.....	73
Выводы по третьему разделу.....	77
4 АЛГЕБРЫ ОПЕРАТОРОВ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА-ФОКА ДЛЯ ГРУПП ДВИЖЕНИЙ, ДЕЙСТВУЮЩИХ ТРАНЗИТИВНО НА ДВУМЕРНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО МНОГООБРАЗИЯ	79
4.1 Условия существования алгебры операторов симметрии.....	79
4.2 Алгебра операторов симметрии уравнения Клейна-Гордона-Фока.....	82
4.2.1 Группа $G_2(N)$	84
4.2.3 Группа $G_3(N)$	87

4.2.3.1 Группы G_3 , действующие транзитивно на V_2	98
Выводы по четвертому разделу.....	100
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	101
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	103

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

Λ CDM	– Λ холодная темная материя
МО	– машинное обучение
БМО	– Байесовское машинное обучение
КМФ	– космический микроволновый фон
БАК	– барионные акустические колебания
LSST	– большой синоптический обзорный телескоп
SLTD	– сильное линзирование по временной задержке
ОНД	– данные наблюдений Хаббла
РКЛ	– расхождение Кульбака — Лейблера
MCMC	– алгоритм Монте-Карло с цепями Маркова
ГВ	– гравитационные волны
ЭМВ	– электромагнитные волны
НС	– нейронные сети
ФЛРУ	– метрика Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера
ОТО	– общая теория относительности
ТЭ	– тёмная энергия
ТМ	– тёмная материя

ВВЕДЕНИЕ

Общая характеристика работы

Настоящая работа посвящена исследованию симметрии и решений нелинейных моделей теории поля для пространственно-временного многообразия. В целях исследования объекта автором были получены связи вязкой жидкости с логарифмически скорректированным степенным законом, изучены пространства параметров фоновой динамики с использованием доступных в настоящее время данных наблюдений Хаббла, а также рассмотрено пространственно-временное многообразие на двумерном подпространстве. С использованием логарифмически скорректированного степенного уравнения состояния рассматривается пространственно – плоская Вселенная Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера (ФЛРУ). Рассматриваемая Вселенная заполнена двумя взаимодействующими компонентами: компонентом степенного закона с логарифмической коррекцией, имеющим вязкость, и компонентом темной материи в пространственно плоской Вселенной ФЛРУ с масштабным фактором a . В рамках теории $f(T)$ гравитации описаны три модели, которые ограничены с применением Байесовского машинного обучения. Для того, чтобы охватить различные диапазоны красного смещения как для объектива, так и для источников, а также разное количество объективов и источников были сгенерированы данные на основе моделей. Были исследованы операторы симметрии первого порядка при условии, что группы движений пространственно-временного многообразия G_3 , $r \leq 3$, действуют транзитивно на двухмерном подпространстве V_2 .

Актуальность темы исследования

В настоящее время исследование симметрии и решений нелинейных моделей теории поля для пространственно – временного многообразия даёт хорошие прорывы в изучении свойств и эволюции Вселенной. Динамика изменения Вселенной является одним из интересных и быстро развивающихся разделов физики и астрономии. Описание Вселенной настоящего времени на малом масштабе может быть выполнено с использованием логарифмически скорректированного степенного уравнения состояния в приближении Дебая. Существует множество различных подходов к современной космологии. Один из интересных вариантов заключается в использовании компьютерных технологий, чтобы ограничить диапазон центральных космологических параметров в двухкомпонентной жидкостной системе. В работе изучается динамическая эволюция Вселенной настоящего времени с применением модифицированного степенного уравнения состояния с логарифмической поправкой при наличии объемной вязкости. В работе приняты пространственно плоское пространство-время ФЛРУ, однородность и изотропность на больших масштабах. Чтобы дать подробное описание ускорения настоящей Вселенной, используется двухкомпонентная модель связанной жидкости. Второй компонент жидкости принимается за темную материю без давления, слабо взаимодействующей с жидкостью с логарифмической поправкой по степенному

закону. Далее анализируются различные типы взаимодействия и некоторые варианты объемной вязкости и получены решения уравнений непрерывности.

Текущая стандартная модель космологии (Λ CDM) модель эффективно объясняет эволюцию и содержание Вселенной, добавляя к ее видимому содержанию два темных сектора: тёмную материю (ТМ) и тёмную энергию (ТЭ). ТМ играет решающую роль в стабилизации галактик и скоплений, в то время как ТЭ необходима для описания ускорения Вселенной в последнее время. Однако, даже с этими дополнениями и замечательными усилиями, модель по-прежнему страдает от серьезных проблем, таких как проблемы с совпадением и космологической постоянной. К тому же появилась довольно новая проблема, которая выявляет еще одну проблему с физическим фоном Λ CDM – это напряженность H_0 . Под понятием напряженность H_0 подразумевается разница между ранними измерениями и поздними значениями постоянной Хаббла H_0 . Для решения данной проблемы в работе использован алгоритм Байесовского машинного обучения (БМО). В данной работе применён БМО, который использует генеративные процессы на основе моделей для улучшения проблем с данными.

В последнее время в связи с проблемой ТМ её возможным описанием в рамках скалярно-тензорной теории значительно вырос интерес к скалярным уравнениям. Точные решения уравнения Клейна-Гордона-Фока используются для построения реалистичных моделей релятивистских квантово-механических систем.

Целью работы является исследование логотропной модифицированной модели с вязкой жидкостью, космологических моделей $f(T)$ - гравитации, объясняющих ускоренное расширение Вселенной, а также исследование операторов симметрии для групп движений пространственно - временного многообразия.

Задачи исследования:

- Описание динамической эволюции Вселенной настоящего времени с применением модифицированного степенного уравнения состояния с логарифмической поправкой при наличии объемной вязкости;
- Ограничение космологических моделей, основанных на $f(T)$ гравитации, с использованием вероятностного подхода Байесовского машинного обучения;
- Исследование уравнения Клейн-Гордона-Фока для заряженной пробной частицы в условиях транзитивности на двухмерном подпространстве V_2 группы движений пространственно-временного многообразия $G_3, r \leq 3$;

Объект исследования: логотропная модифицированная модель с вязкой жидкостью, степенная космологическая модель Бенгочей и Ферраро, экспоненциальная космологическая модель Линдера, операторы симметрии для групп движений пространственно - временного многообразия.

Методы исследования:

Аналитические и численные методы решения дифференциальных уравнений, метод Байесовского машинного обучения, метод максимального правдоподобия, метод Монте-Карло, метод Куллбак-Лейблера, нейронные сети, глубокое вероятностное обучение, алгебра операторов симметрии.

Основные положения, выносимые на защиту

Логарифмически скорректированное степенное модифицированное уравнение состояния при наличии объемной вязкости $\zeta(H, t)$ в однородном и изотропном пространственно-плоском пространстве-времени ФЛРУ описывает ускоряющееся расширение поздней Вселенной в терминах логотропной темной жидкости.

Ограничение космологических моделей, основанных на $f(T)$ гравитации, с использованием вероятностного подхода Байесовского машинного обучения устраняет проблему разницы между ранними измерениями и поздними значениями постоянной Хаббла.

Уравнение Клейн-Гордона-Фока с использованием метода полного разделения переменных правильно описывает взаимодействие аксионного поля с электромагнитным в условиях транзитивности на двухмерном подпространстве V_2 группы движений пространственно-временного многообразия G_3 .

Научная новизна работы заключается в том, что впервые:

- 1 На основе логарифмически скорректированного степенного модифицированного уравнения состояния при наличии объемной вязкости определена модель Вселенной тёмной энергии.
- 2 С использованием Байесовского машинного обучения найдено решение проблемы напряженности в гравитации.
- 3 Найдены условия существования алгебры операторов симметрии классического и квантового уравнений движения для заряженной скалярной пробной частицы во внешнем электромагнитном поле в условиях транзитивности.

Теоретическая и практическая значимость работы

Результаты, полученные в диссертационной работе, вносят значимый вклад в изучение термодинамических аспектов эволюции Вселенной позднего времени и учет влияния теплового излучения на формирование сингулярности. Результаты могут быть использованы при интерпретации данных космического микроволнового фона и барионного акустического колебания. Рассмотренные метрики могут найти применение в космологии, особенно при изучении процессов, происходящих на ранних этапах эволюции Вселенной и при построении моделей взаимодействия аксионного поля с электромагнитным, что представляет интерес при изучении проблемы тёмной материи.

Личный вклад автора

Весь объем диссертационной работы, выбор метода исследования и численные расчеты выполнены автором самостоятельно. Постановка задач и обсуждение результатов проводились совместно с научными руководителями.

Достоверность результатов

Достоверность научных результатов прежде всего определяется тем, что они хорошо подтверждаются согласованностью с существующими наблюдательными данными. Кроме того, полученные результаты согласуются с выводами об ускоренном расширении Вселенной. Помимо этого, достоверность и обоснованность результатов подтверждаются наличием публикаций в журналах дальнего зарубежья с высоким импакт-фактором, в сборниках международных научно – практических конференции и в изданиях, рекомендуемых уполномоченным органом РК:

Brevik I., Myrzakulov K., Zhadyranova A. et al. Viscous coupled fluids in terms of a log-corrected equation-of-state // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics.– 2021.– Vol. 18, №12. – P. 2150198,

Aljaf M., Elizalde E., Zhadyranova A. et al. Solving the H_0 tension in $f(T)$ gravity through Bayesian machine learning // The European Physical Journal C. – 2022.– Vol. 82, №12. – P. 1130,

Obukhov V.V., Myrzakulov K.R., Guselnikova U.A., Zhadyranova A.A. Algebras of Symmetry Operators of the Klein–Gordon–Fock Equation for Groups Acting Transitively on Two-Dimensional Subspaces of a Space-Time Manifold // Russian Physics Journal.– 2021.–Vol. 64, №7.– P. 1320-1327,

Бахрам А.Ж., Жадыранова А.А. Хаббл шиеленісін тұтқыр қара сұйықтықты қолданып шешу // XVIII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «GYLYM JANE BILIM - 2023» - 2023 - С. 72-76,

Өсербай Ж.Қ., Жадыранова А.А. $F(T)$ модельдерінің фондық динамикасын зерттеу үшін Байес машиналық оқытуды қолдану // XVIII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «GYLYM JANE BILIM - 2023» -2023- С. 123-128,

Жадыранова А.А. Использование программного обеспечения Python в космологии // Научный журнал «Доклады НАН РК» -2023 – Т. 346, № 2. – С. 5–18.

К текущему моменту опубликованные соискателем результаты работы процитированы в 6 независимых реферируемых публикациях.

Апробация работы

Научные результаты и положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

– на семинаре кафедры физики Калифорнийского государственного университета г. Фресно, США по теме «Нелинейные модели теории поля для пространственно-временного многообразия»;

– на семинаре, организованном в рамках Декады науки в ЕНУ Л.Н. Гумилёва по теме: «Исследование симметрии и решений некоторых нелинейных моделей теории поля для пространственно-временного многообразия»;

– на казахско-узбекском семинаре по теме: «Исследование симметрии и решений некоторых нелинейных моделей теории поля для пространственно-временного многообразия».

–на XVIII Международной научной конференции студентов и молодых ученых «GYLYM JANE BILIM - 2023» (ЕНУ, 2023);

Связь темы диссертации с планами научной работы

Диссертационная работа частично выполнена в рамках проекта 2020-2022 гг. по теме " Исследование интегрируемых моделей сильных гравитационных полей в рамках теории солитонов" и ИРН: AP08052034.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа изложена на 116 страницах и состоит из содержания, введения, четырех разделов, 19 рисунков, 302 формулы, 5 таблиц, заключения, списка использованных источников из 234 наименований.

1 СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ ПРИ ОПИСАНИИ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

Понятие симметрия прочно вошло в современные физические теории и гипотезы, без него не мыслим ни один крупный шаг в теоретической физике. Согласно Вейлю [1], под симметрией подразумевается инвариантность какого-либо объекта при определенном роде преобразованиях, то есть симметрия включает в себя совокупность инвариантных свойств объекта. В физике наравне с геометрическими видами симметрии рассматриваются и его негеометрические виды. Если под геометрическими видами понимаем пространственно – временные виды симметрии, то под негеометрическими имеем в виду перестановочную, калибровочную, унитарную и другие виды законов взаимодействий. Использование симметрии различных физических процессов основывается на аспектах теории представлений групп. Теория представления групп необходима для физики, поскольку физические объекты могут иметь несколько компонент, образуя “многомерный вектор”, и эти объекты должны удовлетворять условиям симметрии обычного трёхмерного пространства или четырёхмерного пространства – времени. Предсказание английским физиком Н. Кеммером в 1938 году “принципа симметрии” оператора Шрёдингера, отвечающего группе O_3 вращений трёхмерного пространства, сыграло огромную роль в развитии теории элементарных частиц. Вид оператора Шрёдингера, обладающего симметрией, определяемого родственной O_3 группой SU_3 для новых элементарных частиц, в каком пространстве действует этот оператор пока неизвестны. Группа унитарных преобразований комплексного трёхмерного пространства, действующей в восьмимерном пространстве, указывает лишь, что этот неизвестный оператор в неизвестном пространстве обладает определённой симметрией. В 1961 году М. Гелл-Манн заметил, что возможно семейство из десяти загадочных частиц, полностью соответствующее десятимерному пространству, в которой действует группа SU_3 . Целый ряд лет физики – экспериментаторы безуспешно ищут загадочные “кварки” на своих ускорителях, а астрономы и астрофизики строят интересные теории о роли этих частиц в прошлом и будущем.

Для того чтобы исследовать геометрические формы в пространстве с точки зрения симметрии, необходимо изучать в том же аспекте структуру самого пространства. Пустое пространство имеет высокую степень симметрии: любая точка подобна любой другой точке, и ни в одной из них нет внутреннего различия между разными направлениями. Преобразования, устанавливающие связь между двумя допустимо одинаковыми системами отсчёта, образуют группу физических автоморфизмов. При преобразованиях этой группы законы природы инвариантны. Преобразования этой группы определяются той его частью, которая относится к координатам точек пространства, то есть можно говорить о физических автоморфизмах пространства. Однако физические явления протекают не только в пространстве, но в пространстве и времени. Симметрия, относительность или однородность этого четырёхмерного

пространства – времени впервые были правильно описаны А. Эйнштейном. А. Эйнштейн собрал все данные о действительной структуре четырехмерного пространственно – временного многообразия и нашёл группу автоморфизмов этого многообразия, которая получила название группы Лоренца.

В то время как инвариантность Лоренца [2] является примером глобальной симметрии, калибровочная симметрия классического электромагнетизма и инвариантность диффеоморфизма в общей теории относительности являются примерами локальных симметрий, поскольку они параметризуются произвольными функциями пространства и времени [3]. Инвариантность Лоренца является геометрической симметрией, которая применима ко всем взаимодействиям, а калибровочная симметрия электромагнетизма касается конкретно электромагнитного взаимодействия. Калибровочная симметрия классического электромагнетизма является внутренней симметрией, поскольку преобразования векторного потенциала происходят во внутреннем пространстве полевой системы, а не в пространстве-времени. Калибровочная симметрия классического электромагнетизма может показаться не более чем математическим курьезом, специфичным для этой теории; но с появлением квантовой теории использование внутренних степеней свободы и связанных с ними внутренних симметрий стало фундаментальным.

Теория групп – это мощный математический инструмент, с помощью которого изучаются симметричные свойства теорий. Группа симметрии пространства-времени Минковского является группой Пуанкаре [4].

Лемма Пуанкаре означает, что существует функция Ω_{jk} такая, что

$$c_{ijk} = \partial_i \Omega_{jk} \quad \text{и} \quad c_{rjk} = \partial_r \Omega_{jk}. \quad (1.1)$$

Поскольку тензор A полностью симметричен, имеем

$$c_{ijk} = c_{jik}, \quad (1.2)$$

и поскольку $c_{jik} = \partial_j \Omega_{ik}$ для некоторой функции Ω_{ik} получаем

$$\partial_i \Omega_{jk} = \partial_j \Omega_{ik}. \quad (1.3)$$

Каждый раз, когда в физических законах наблюдается некоторая симметрия, имеется некоторая сохраняемая величина. Это гласит из теоремы Нетер [5-11], что каждая дифференцируемая симметрия действия физической системы с консервативными силами имеет соответствующий закон сохранения [12]. Действие физической системы есть интеграл по времени от функции лагранжа. В общей форме лагранжиан имеет вид:

$$L = T(q, \dot{q}) - V(q), \quad (1.4)$$

где T и V – кинетическая и потенциальная энергиями. Функция энергии имеет связь с лагранжианом в виде уравнения

$$E_L \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L = 0, \quad (1.5)$$

где E_L – полная энергия и постоянная движения.

Из функции лагранжа принципом наименьшего действия можно определить поведение самой системы. Теорему Нетер применяют в вариационном исчислении, она показывает фундаментальную связь между симметриями физической системы и законами сохранения.

Теорему Нетер используют только к непрерывным и гладким симметриям над физическим пространством.

В общей теории относительности (ОТО) для связи кривизны пространства – времени используются уравнения Эйнштейна [13]. ОТО описывает тяготение как проявление геометрии пространства – времени, предложенная Альбертом Эйнштейном в 1915-1916 годах. Главная идея ОТО определить метрику пространственно-временного многообразия через распределение материи и скорости материи. Поэтому целесообразно рассматривать четырёхмерное пространственно-временное многообразие, не разделяя пространство и время. В ОТО определение симметрий было дано Холлом в 2004 году. Идея заключалась в использовании гладких векторных полей, локальных диффеоморфизмов потока, дающие сохранение геометрических особенностей пространства – времени. Множество векторных полей симметрии в пространстве – времени образует алгебру Ли.

Одним из главных типов симметрий, задающий гладкое векторное поле, является векторное поле Киллинга с сохранением метрического тензора. Например, метрика ФЛРУ имеет алгебру Киллинга шестой размерности с учётом трёх перемещений и трёх поворотов. Исключением является статический случай Эйнштейна, который имеет алгебру Киллинга седьмой размерности с учётом трёх перемещений, трёх поворотов и времени. Определенное векторное поле симметрии накладывает ограничения на пространство и время. Некоторые пространственно-временные многообразия становятся неполными в связи с симметрией рассматриваемых космологических моделей.

Чтобы проверить многообразие на симметричность, нужно только проверить, является ли $\nabla \circ$ полностью симметричным. ∇ обозначает связность Леви-Чивиты:

$$(\nabla \circ)(X, Y, Z) = \nabla_X(Y \circ Z) - (\nabla_X Y) \circ Z - Y \circ \nabla_X Z. \quad (1.6)$$

Если $\nabla \circ(X, Y, Z)$ симметричен по всем трем аргументам, то умножение выполняется для любых локальных векторных полей X и Y

$$L_{X \circ Y}(\circ) = X \circ L_Y(\circ) + Y \circ L_X(\circ), \quad (1.7)$$

где L обозначает производную Ли.

Геометрическое описание большинства космологических моделей Вселенной основано на модели однородного изотропного пространства ФЛРУ [14-19]. Высокая степень изотропности пространства доказана на основе исследований реликтового излучения [20, 21]. Высокая степень изотропности является основной причиной того, что сама Вселенная пространственно однородна и изотропна в хорошем приближении [22-28]. В качестве точных моделей наблюдаемой области Вселенной используется модель Вселенной Фридмана [29, 30]. Точные решения характеризуются их пространственно-временными симметриями. Симметрии характеризуются размерностью S поверхностей однородности и размерностью q группы изотропности, общей размерностью r группы изометрий G_r . В работе [31] подробно описаны классификации следующих космологических моделей Вселенной:

Вселенная Геделя, вращающаяся повсюду с постоянной завихренностью, “статическая Вселенная” Эйнштейна (Эйнштейн 1917), уникальную нерасширяющуюся модель Фридмана с $k = 0$ и $\Lambda > 0$, модели с более высокой симметрией (Вселенные де Ситтера и анти-де Ситтера с группами изотропии более высокой размерности), большое семейство Вселенных Бьянки, пространственно однородных, но анизотропных, которые подразделяются на девять типов в соответствии со структурными константами алгебры Ли трехмерной группы симметрии G_3 , Вселенные Кантовски-Сакса.

1.1 Модели Вселенной, заполненной вязкой тёмной жидкостью

На основе огромного количества теоретических работ и экспериментальных исследований [32-36] сделан вывод, что расширяется только само пространство и известен он как “метрическое расширение”. С использованием математики метрических тензоров можно описать метрическое расширение пространства [37-42]. Под пространством понимаем трёхмерное многообразие, тогда как понятие Вселенной включает в себя материю и энергию в пространстве, дополнительные измерения и время [43-48].

В настоящее время существует множество моделей ТЭ, и любая из них может быть использована для описания динамики расширения Вселенной. Некоторые из этих моделей основаны на скалярных полях, а некоторые из них похожи на инфляционные модели [49, 50] или основаны на фермионных полях [51, 52]. Поле фермионов играет роль в формировании свободной сингулярности космологических решений и объяснении позднего времени ускорения. Большой интерес также представляют модели с полями электродинамического происхождения [53]. Действие с тензором электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ или полями Янга-Миллса позволяет находить новые интересные решения космологических проблем. Поля Янга-Миллса могут взаимодействовать сами с собой и друг с другом, поэтому они нелинейны, для них не выполняется принцип суперпозиции, и их нелинейность усложняет поиск решений.

Впервые подтверждение ускоренного расширения Вселенной появилось в

наблюдениях за сверхновыми типа Ia [54, 55]. Последующие наблюдения, такие как: БАК [56], крупномасштабная структура Вселенной [57, 58], наблюдение КМФ [59, 60], слабое гравитационное линзирование [61], а также расчет параметра Хаббла в зависимости от красного смещения подтвердили это явление. Параметр Хаббла записывается в следующем виде

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (1.8)$$

В 1929 году Э. Хаббл установил зависимость между красным смещением галактик и расстоянием до них, рисунок 1.1 взят из оригинальной работы Хаббла, называемый законом Хаббла [62].

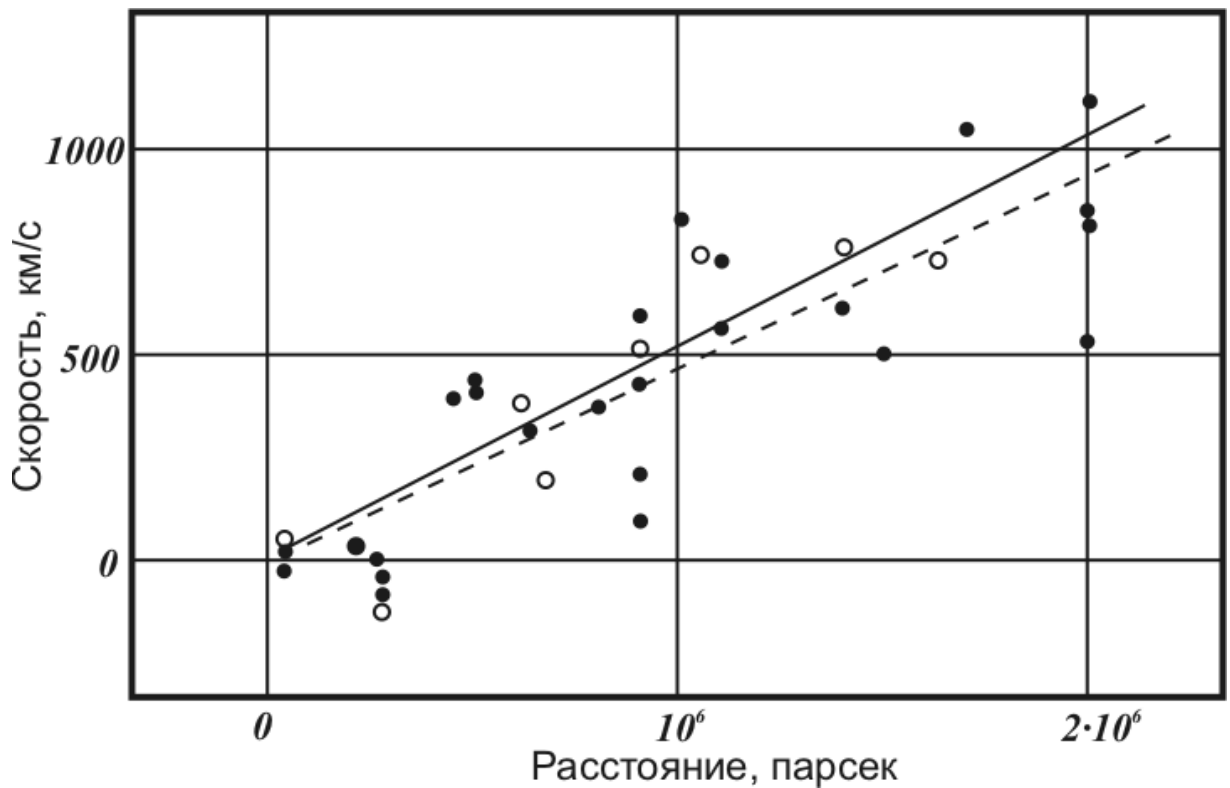


Рисунок 1.1 –Закон Хаббла [62]

Параметры скорости и расстояния, которые видим в законе Хаббла собственно не измеряются. На самом деле определяется, например, яркость сверхновой, которая даёт информацию о расстоянии и красном смещении спектра излучения. Изучив собственные измерения расстояний до галактик с измерениями других двух американских астрономов Весто Слайфера и Милтона Хьюмасаона красных смещений, Хаббл получил коэффициент пропорциональности между красным смещением, связанным с галактикой, и его расстоянием. Данный коэффициент пропорциональности составил порядка 500 км/с на мегапарсек. В настоящее время значение постоянной Хаббла составляет

по различным расчётам $74,03 \pm 1,42 \frac{\text{км} \cdot \text{с}}{\text{Мпк}}$ [63] или $67,4 \pm 0,5 \frac{\text{км} \cdot \text{с}}{\text{Мпк}}$ [64].

Открытие ускоренного расширения Вселенной является одним из величайших событий нашей эпохи [65]. Это требует существования какого-то вида ТЭ, которая должна быть добавлена к рабочим моделям Вселенной. Однако природа ТЭ все еще остается загадкой; хотя ситуация может измениться в любой момент, благодаря высококачественным данным наблюдений, ожидаемым от будущего сотрудничества и соответствующих космических миссий [66, 67]. С другой стороны, доступные данные наблюдений уже дают некоторые подсказки, частично проливая свет на эту проблему ТЭ. В настоящее время, исходя только из данных наблюдений (не зависящим от модели способом), можно решить, какие направления следует искать, и возможных кандидатов для введения ТЭ, чтобы решить проблемы ускоренно расширяющейся Вселенной для моделей ТЭ с жидкостями [68, 69]. Наиболее интересным аспектом во всех этих инструментах, о которых здесь следует упомянуть, является то, что разные подходы дают почти одинаковый результат, и практически невозможно принять окончательное решение, проводя различие между ними.

Таким образом, считается, что Вселенная переживает ускоренное расширение, движимое пока неизвестной ТЭ [70]. Много усилий было затрачено на то, чтобы понять природу и происхождение ТЭ [71].

Если ОТО является правильной теорией гравитации для описания фоновой динамики нашей Вселенной позднего времени, то нужен какой-то источник энергии, способный ускорить ее расширение. С другой стороны, знаем, что это должен быть источник энергии, ведущий себя таким образом, чтобы он не разрушал наблюдаемую Вселенную, полную хорошо изученных различных объектов. Более того, если примем модель космологической постоянной за модель ТЭ, то вскоре станет ясно, что должны быть готовы к внесению изменений, потому что она страдает от очень серьезных проблем. Вскоре после открытия проблем с космологической постоянной было естественно предположить, что ТЭ имеет динамическую природу, и были введены и развиты различные взаимодействующие динамические модели ТЭ. В настоящее время ведется интенсивная работа в этом направлении, и есть надежда, что новые проблемы могут быть в итоге решены с помощью некоторой взаимодействующей динамической модели темной энергии.

Существует множество наблюдательных свидетельств, которые доказывают, что в настоящее время наша Вселенная ускоряется.

Динамика Вселенной в рамках ОТО записывается уравнениями Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.9)$$

где $T_{\mu\nu}$ – тензор энергии импульса. Уравнения Эйнштейна для однородной и изотропной Вселенной, которая описывается метрикой ФЛРУ, запишется в виде

системы уравнений Фридмана:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (1.10)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (1.11)$$

здесь ρ и p плотность энергии и давление. Уравнение сохранения запишется в виде

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (1.12)$$

Когда уравнения состояния для однокомпонентной плоской Вселенной имеет вид $p = w\rho$, $w = const$ уравнения Фридмана и уравнение для масштабного фактора запишутся в виде

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right), \quad p = -\frac{1}{8\pi G} \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right), \quad (1.13)$$

$$a(t) = a_0 \left[\frac{3}{2}(1+w)H_0 t \right]^{\frac{2}{3(1+w)}}. \quad (1.14)$$

Чтобы объяснить ускорение в рамках ОТО Эйнштейна, обычно вводится ТЭ, имеющая отрицательное давление. Для поиска кандидатов ТЭ, космологическая постоянная Λ была предложена в качестве простейшего кандидата на роль ТЭ, и, объединяя ее с холодной темной материей, модель Λ CDM хорошо согласуется с большинством данных наблюдений. Но это стало проблемой, потому что она страдает от космологической постоянной и проблемы космического совпадения [72]. Кроме того, недавние наблюдения предсказывают, что почти 68,5% нашей Вселенной заполнено ТЭ и 26,5% - ТМ, а остальные 5% – это обычная барионная материя и излучение (рисунок 1.2).

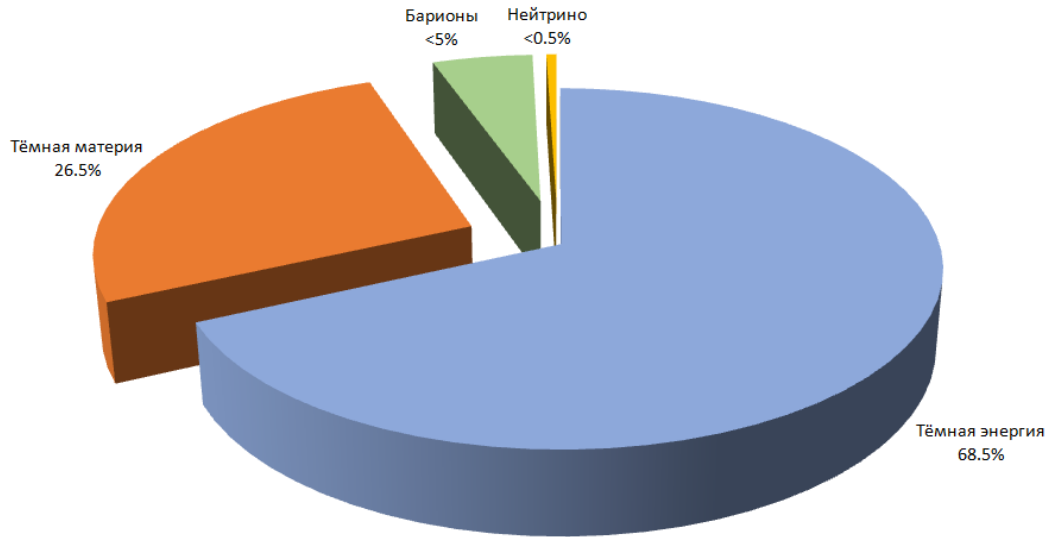


Рисунок 1.2 – Распределение материи во Вселенной

В космологии большое значение играют энергетические уровни, которые подчиняются следующим условиям:

$$\begin{aligned}
 NEC &\Rightarrow \rho + p \geq 0, \\
 WEC &\Rightarrow \rho \geq 0 \text{ and } \rho + p \geq 0, \\
 SEC &\Rightarrow \rho + 3p \geq 0, \text{ and } \rho + p \geq 0, \\
 DEC &\Rightarrow \rho \geq 0 \text{ and } -\rho \leq p \leq \rho,
 \end{aligned}
 \tag{1.15}$$

где NEC, WEC, SEC и DEC отвечают нулевому, слабому, сильному, доминирующему энергетическому условиям, которые выражаются через масштабный фактор и его первые и вторые производные

$$\begin{aligned}
 NEC &\Rightarrow -\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \geq 0, \\
 WEC &\Rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \geq 0, \\
 SEC &\Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} \leq 0, \\
 DEC &\Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left[\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right] \geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

Из второго уравнения Фридмана следует, что условие ускоренного расширения Вселенной подчиняется неравенству $\rho + 3p \leq 0$, из которого следует, что ускоренное расширение Вселенной должно обладать большим

отрицательным давлением $p < -\frac{1}{3}\rho$. Привлечение ТЭ с отрицательным давлением может дать объяснение ускоренного расширения Вселенной.

Итак, учёные пытаются найти какого-нибудь подходящего кандидата на роль ТЭ, который был бы свободен от двух вышеуказанных проблем. В результате были введены различные модели темной энергии, такие как Квинтэссенция [73], К-эссенция [74], Тахион [75, 76], Фантом [77-79], Квинтом [80], газ Чаплыгина [81, 82], голографическая тёмная энергия [83] и так далее. Тем не менее, природа ТЭ все еще неуловима.

Теперь, чтобы облегчить проблему космического совпадения и узнать природу ТЭ, космологи ввели динамику взаимодействия между ТЭ и ТМ [84]. Хотя нет веских оснований исключать такую динамику, но, тем не менее, возникает вопрос, какой должна быть возможная форма взаимодействия между этими двумя компонентами. Поскольку за этим выбором нет таких хорошо мотивированных аргументов, имеем дело с феноменологическим взаимодействующим термином между этими компонентами, но иногда выбираем с математической точки зрения или ограничиваем параметры в терминах взаимодействия последними данными.

Ведущей интерпретацией ТЭ [85] является космологическая постоянная с уравнением состояния $\omega = -1$. Хотя эта интерпретация согласуется с данными наблюдений, на фундаментальном уровне она не является убедительной. Плотность энергии вакуума падает намного ниже значения, предсказываемого любой разумной квантовой теорией поля, и это неизбежно приводит к проблеме совпадения, т.е., “почему сегодня плотности энергии вакуума и материи точно такого же порядка?”. Чтобы преодолеть проблему совпадения, некоторые сложные динамические модели тёмной энергии либо связывают ТЭ со скалярным полем, называемым квинтэссенцией, с $\omega > -1$, или к экзотическому полю, называемому фантомом, с $\omega < -1$ [86-88] были выдвинуты для замены космологической постоянной. Но сомнительно, что виден явный победитель, способный объяснить тёмную энергию и решить проблему совпадения.

Из имеющихся оценок, полученных по результатам наблюдений, следует, что с вероятностью 0.95 значение ω лежит в интервале

$$-1.46 < \omega < -0.76. \quad (1.17)$$

Поскольку тёмная энергия вносит значительный вклад в содержание Вселенной, естественно рассматривать его взаимодействие с остальными полями стандартной модели в рамках теории поля. Возможность того, что ТЭ и ТМ могут взаимодействовать, была изучена, среди прочего, в работах [89-92]. Было показано, что связь между полем ТЭ (или квинтэссенцией) и ТМ может обеспечить механизм для решения проблемы совпадения в работах [93-96]. Подходящий выбор связи, мотивированный голографическими аргументами, также может привести к преодолению фантомного барьера, который отделяет модели с уравнением состояния $\omega > -1$ от моделей с $\omega < -1$ [97, 98]. Кроме того, утверждалось, что надлежащее взаимодействие между тёмной энергией и тёмной

материей может влиять на динамику возмущений и влиять на самые низкие мультиполи в спектре космического микроволнового фона [99, 100]. Сила связи может быть такой же большой, как постоянная тонкой структуры квантовой электродинамики [101]. Такое взаимодействие может быть выведено из истории расширения Вселенной, как это проявляется, например, в данных о сверхновой вместе с космическим микроволновым фоном и крупномасштабной структурой [102]. Тем не менее, наблюдаемые пределы силы такого взаимодействия остаются слабыми [103]. Кроме того, было высказано предположение, что на динамическое равновесие разрушенных структур будет влиять соединение ТЭ с ТМ [104-107].

Взаимодействие между ТЭ и ТМ может стать серьезной проблемой, с которой придется столкнуться при изучении физики ТЭ. Однако из-за того, что природа этих двух компонентов остается неизвестной, будет невозможно получить точную форму взаимодействия, основанное на первых принципах. Нужно с самого начала предполагать определенную связь [108-110] или определять ее исходя из феноменологических требований [111-113]. С учетом уравнений непрерывности взаимодействие между ТЭ и ТМ должно быть функцией плотностей энергии, умноженных на величину с единицами измерения, обратными времени. Для последнего очевидным выбором является параметр Хаббла. Таким образом, взаимодействие между ТЭ и ТМ может быть выражено в формах Q .

Учитывая, что связи являются членами лагранжиана, которые смешивают как ТЭ, так и ТМ, можно предположить, что они могут быть параметризованы некоторым произведением плотностей ТЭ и ТМ [114]. Помимо этих феноменологических описаний взаимодействия между ТЭ и ТМ, недавно была предпринята попытка описать взаимодействие с термодинамической точки зрения [115, 116].

Таким образом, объяснение ускоренного расширения Вселенной в последнее время стало одной из самых больших и открытых проблем в современной космологии на сегодняшний день.

1.2 Наблюдательные ограничения на модели $f(T)$ гравитации от космических хронометров

Наиболее разумным описанием этой ускоряющейся фазы является введение некоего гипотетического флюида ТЭ, составляющего порядка 70% от общей плотности энергии Вселенной. Космологическая постоянная Λ , связанная с энергией нулевой точки квантовых полей, является основным параметром для ТЭ в соответствии с большим количеством доступных данных наблюдений. Однако, несмотря на большие успехи что касается Λ -космологии, то она представляет серьезные возражения на стыке космологии и физики элементарных частиц, такие как проблема Λ космологической постоянной [117, 118] и проблема совпадения [119]. Из-за этих двух серьезных проблем Λ космологической постоянной за последние несколько лет было предложено и обсуждено несколько альтернатив [120]. Однако, что касается различных

космологических теорий, сценарий, в котором ТМ взаимодействует с ТЭ, привлек большое внимание в современной литературе. Взаимодействие между ТЭ и ТМ было в первую очередь мотивировано тем, чтобы учесть малую ценность Λ космологической постоянной, однако позже было обнаружено, что модели дают разумное объяснение проблемы космического совпадения [121]. Недавно было высказано предположение, что текущие данные наблюдений могут свидетельствовать в пользу позднего взаимодействия между тёмной энергией и тёмной материей [122, 123]. Параметр связи взаимодействия в темном секторе также был измерен с помощью нескольких данных наблюдений [124, 125]. Фактически, класс взаимодействующих моделей между тёмной энергией и тёмной материей мог бы стать многообещающим кандидатом для устранения текущей напряженности в отношении значения постоянной Хаббла [126]. Кроме того, утверждалось, что взаимодействие между этими темными секторами может влиять на анализ возмущений, что приводит к значительным изменениям в самых низких мультиполях спектра космического микроволнового фона [127]. Основываясь на анализе взаимодействующих моделей между темными секторами, судя по имеющимся в настоящее время данным наблюдений, кажется многообещающим, что взаимодействие в темных секторах может открыть некоторые новые возможности в ближайшем будущем.

Существуют различные причины, по которым проблема ТЭ не может быть решена, одной из главных является существующая в настоящее время напряженность (разница) между различными наборами данных наблюдений. Это вызывает обоснованные сомнения, заставляя полагать, что у рассматриваемых моделей есть реальные проблемы, и что эти проблемы могут быть устранены только с помощью новых данных наблюдений, охватывающих расширенные диапазоны красного смещения. Действительно, кажется правильным сказать, что только данные наблюдений с более высоким красным смещением могут решить имеющиеся проблемы, потому что у нас уже есть качественные данные, охватывающие поведение нашей Вселенной с низким красным смещением.

Устранение одного или нескольких из этих допущений может привести к различным результатам.

Однако существующие инструменты, обычно используемые при анализе модели, слишком нечувствительны или либо не могут быть использованы, когда одно из допущений изменяется или удаляется. С другой стороны, на данный момент даже невозможно предсказать, разрешат ли новые данные напряженность между наборами данных или существующая напряженность будет замаскирована, но появятся более сложные задачи, которые необходимо решить. Проблема напряженности, связанная с Вселенной позднего времени, может быть эффективным способом раскрытия природы ТЭ.

В литературе [128] активно обсуждается проблема напряженности постоянной Хаббла H_0 . Это возникло из отчетов о результатах космических телескопов Планка и Хаббла, когда сообщество заметило, что, помимо других проблем современной космологии, существует также противоречие между рассчитанными значениями постоянной Хаббла H_0 , полученными из двух

наборов данных наблюдений. Проблема связана с разницей между наблюдаемыми значениями постоянной Хаббла H_0 , полученными в двух упомянутых проектах. У этого могут быть две причины, указывающие либо на новую физику, либо на проблему с измерениями. На данный момент очень трудно оценить, чего ожидать; однако одно кажется ясным – если эти результаты указывают на новую физику, то у нас есть очень хорошая отправная точка для уточнения, ограничения и выбора хороших расширений и модификаций общей теории относительности. Недавнее обсуждение этой проблемы выявило границы, отделяющие хорошие модели от плохих. Однако еще слишком рано делать окончательный вывод, поскольку проблемы, связанные с измерениями, и их сильное влияние на проблему разницы постоянной Хаббла H_0 на данный момент не исключены полностью. Показано, что некоторые из существующих взаимодействующих динамических моделей, могут быть использованы для решения этой проблемы. С другой стороны, модификация общей теории относительности также может предложить решения [129]. В работе [130] рассматривается другой подход к решению этой проблемы, как хорошей возможности для построения новых космологических моделей с вязкими неоднородными жидкостями. Действительно, в настоящее время в научной литературе существует огромное количество работ, указывающих на то, как можно решить проблему напряженности постоянной Хаббла H_0 или, по крайней мере, облегчить ее. Вязкость космической жидкости может быть очень полезной не только для моделирования ускоренно расширяющейся Вселенной, но и для моделирования космической инфляции. Однако раннее исследование с существующими моделями показало, что необходимо было сконструировать новую, поскольку старые модели не могли решить проблему напряженности постоянной Хаббла H_0 . Используя БМО и инструменты вероятностного программирования, можно построить новые модели неоднородной единой текучей Вселенной на Байесовском подходе к машинному обучению (МО). В методе используется генеративный процесс, основанный на модели, позволяющий ограничить свободные параметры модели.

Байесовское машинное обучение используется для исследования непрозрачности Вселенной. Он опирается на генеративный процесс, где модель является ключевым объектом для генерации данных, включающих неизвестные параметры модели, априорные убеждения, и позволяет получить апостериорные результаты. Экспериментальные данные показывают, что Вселенная не полностью прозрачна, и это может оказать существенное влияние на проблему напряженности постоянной Хаббла H_0 .

Алгоритмы машинного обучения оказались очень эффективными для анализа большого объема данных и, в частности, для поиска в них закономерностей, что значительно ускоряет изучение различных процессов в физике, химии, медицине и биологии. В последнее время машинное обучение стало использоваться в космологии и астрофизике, демонстрируя явные преимущества перед другими, более обычными методами, используемыми в аналогичных исследованиях. В связи с этим естественно исследовать пределы, с

которыми может столкнуться машинное обучение, поскольку в ближайшем будущем будет накоплен огромный объем данных наблюдений, и эффективный анализ данных в таких огромных масштабах станет ключевым аспектом исследований в области космологии и астрофизики.

Поэтому необходимо начать тестирование этих методов уже сейчас, даже если объемы данных в настоящее время не так велики. Действительно, благодаря своей прогностической способности машинное обучение уже может быть использовано для разработки новых экспериментов или наблюдательных тестов, позволяя также следовать определенным путям в данном наблюдении или эксперименте. Чтобы понять, как алгоритмы машинного обучения могут быть использованы в космологии, подробно рассмотрим, что стоит за этими методами. В общем случае любой алгоритм машинного обучения состоит из следующих трех шагов. Во-первых, нужно определить модель. Затем нужно выбрать набор данных и запустить алгоритм обучения; то есть структуру нейронной сети и способ выполнения оптимизации, чтобы найти неизвестные веса, характеризующие сеть [131, 132]. Для определения модели обычно задается набор уравнений или правил, описывающих поведение модели. Отображая данные в терминах входных и выходных пар, выполняется некоторый алгоритм оптимизации, чтобы получить окончательный набор весов, дающий конкретную нейронную сеть.

Космическая непрозрачность начинается с решающего открытия ускоренного расширения Вселенной через наблюдаемое затемнение сверхновых типа Ia (SN Ia) [133]. Попытка понять, что стоит за механизмом, ускоряющим расширение, приводит к нескольким интересным идеям. Ключевым из них является существование темной энергии и то, как темная энергия может быть введена в уравнения поля общей теории относительности, описывающие фоновую динамику. Один из вариантов состоит в том, чтобы рассматривать его как жидкость [134]. Однако существуют и другие явления, которые могут способствовать объяснению того, почему сверхновые типа Ia (SN Ia) наблюдаются слабее, чем ожидалось. Действительно, на наблюдения SN Ia влияют как минимум четыре различных возможных источника непрозрачности. А именно, пыль Млечного Пути, межгалактическая среда, промежуточные галактики или непрозрачность родительской галактики. В этой связи следует отметить, что вопрос о том, насколько прозрачна Вселенная, может оказать существенное влияние на оценки параметров модели и привести к другому результату. С другой стороны, нужно оценить, прозрачны ли другие области Вселенной или нет, поскольку последующие наблюдения независимо подтвердили ускоренное расширение Вселенной [135].

Появилось много работ, исследующих космическую непрозрачность, предполагающих, что причиной нарушения соотношения является несохранение числа фотонов. С точки зрения наблюдений, если Вселенная непрозрачна, это существенно повлияет на измерения расстояния до светимости. Следовательно, лучший способ проверить космическую непрозрачность наблюдательным путем – это независимые измерения собственной яркости и размеров одного и того же

объекта без использования какой-либо конкретной космологической модели. Однако нужно учитывать, что из-за астрофизических сложностей и инструментальных ограничений наблюдения такого типа чрезвычайно сложны.

С другой стороны, стандартные сирены могут сыграть важную роль, помогая разработать альтернативные инструменты для указания расстояний без непрозрачности. Это связано с тем, что в метрике ФЛРУ гравитационные волны свободно распространяются через идеальную жидкость без какого-либо поглощения и рассеивания. Следовательно, сопоставление расстояния светимости, полученного из SN Ia, с измерениями, полученными из источников гравитационных волн, может дать новую схему для исследования непрозрачности Вселенной. Однако несоответствие красного смещения между событиями гравитационных волн и образцом SN Ia также по-прежнему остается проблемой. Каковы способы преодоления всех этих трудностей с наблюдениями и каковы пределы исследований космической непрозрачности? Ответ на эти вопросы будет зависеть от качества данных наблюдений, которое следует повысить. Однако на данный момент уже можем преодолеть некоторые трудности, используя алгоритмы МО.

1.3 Теория полного разделения переменных

Поскольку природа ТЭ до сих пор неизвестна и одним из кандидатов на выполнение роли ТЭ можно представить скалярное поле ϕ с правильно подобранным потенциалом $V(\phi)$. В таких моделях различие заключается в выборе лагранжиана скалярного поля. В случае модели ТЭ типа квинтэссенции, являющаяся динамическим скалярным полем, энергетическая плотность может меняться в пространстве и времени. ТЭ это своего рода частицеподобные возбуждения поля, называемого «квинтэссенцией». Отличие от космологической константы в том, что плотность квинтэссенции варьируется в пространстве и времени. Чтобы квинтэссенция не могла формировать крупномасштабные структуры по примеру обычной материи, она должна быть очень лёгкой, то есть иметь большую комптоновскую длину волны. Существования квинтэссенции ещё не обнаружено, но исключить его возможное существование нельзя. Гипотеза квинтэссенции предсказывает чуть более медленное ускорение Вселенной, в сравнении с гипотезой космологической константы. Под квинтэссенцией принимается скалярное поле ϕ с потенциалом $V(\phi)$, на которое влияет кривизна пространства - времени. Действие для этого поля запишем:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} L = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} - V(\phi) \right], \quad (1.18)$$

здесь $g \equiv \det g_{\mu\nu}$. Проводя варьирование действия по полю, находится уравнение движения для скалярного поля:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\nu}} \right) = -\frac{dV}{d\varphi}. \quad (1.19)$$

В случае ФЛРУ метрики для однородного поля $\varphi(t)$ запишется:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0, \quad (1.20)$$

где $V'(\varphi) \equiv \frac{dV}{d\varphi}$. Полученное уравнение также называется уравнением Клейна-Гордона.

Уравнение Клейна-Гордона-Фока описывает динамику заряженной массивной скалярной частицы, взаимодействующей с электромагнитным полем. В последнее время интерес к уравнению Клейна-Гордона-Фока значительно возрос в связи с попытками решить проблему темной материи в рамках скалярно-тензорной теории. Для успешного построения реалистичной модели особенно важно иметь если не точное решение основного уравнения, то, по крайней мере, надежное приближенное решение. Такая возможность была обеспечена методом полного разделения переменных, который позволяет свести исходные уравнения в частных переменных к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом случае получение приближенных решений не является проблемой, в то время как традиционные подходы в рамках теории возмущений могут оказаться неэффективными. Следует отметить, что при нахождении всех известных точных решений уравнений гравитационного поля (в том числе самосогласованных) на определенных этапах всегда происходит разделение переменных. Симметрия классических и квантовых уравнений движения одной частицы тесно связана с симметрией самого пространства. Если пространство допускает множества геометрических объектов, состоящих из полей Киллинга, то уравнения движения также имеют операторы симметрии, определенные теми же наборами. С физической точки зрения особый интерес представляют наборы из трех геометрических объектов. В пространствах Стакеля такие множества называются полными. Они состоят из взаимно коммутирующих векторных и тензорных полей Киллинга. Однородные пространства - это другие интересные типы пространств с тремя геометрическими объектами. В них группа движения действует просто транзитивно на ненулевой гиперповерхности транзитивности. Теория полного разделения переменных (или теория пространств Стакеля) является следствием теории симметрии. Полное разделение переменных в классических, а при определенных условиях и в квантовых уравнениях движения пробной частицы возможно только в пространстве Стакеля. Пространства Стакеля были названы в честь Пола Стакеля, который привел первый пример такого пространства [136]. Помимо Стакеля, полезный и применимый вклад в построение теории внесли Леви-Чивита [137], Яров-Яровой [138] и Шаповалов [139]. В.В. Шаповалов доказал основную теорему теории пространств Стакеля. Теорема позволяет осуществить инвариантное разбиение множества метрик Стакеля на классы эквивалентности. Это позволило решить задачи классификации отдельно для

каждого типа пространства (перечислить все неэквивалентные метрики и электромагнитные потенциалы).

В статье [140] теория была обобщена на случай сложных привилегированных систем координат. Более подробное описание теории и довольно подробную библиографию можно найти в работах [141, 142]. Теорема Шаповалова имеет большое теоретическое и прикладное значение. В частности, теорема позволила получить и систематизировать все случаи полного разделения переменных в одночастичных уравнениях классической и квантовой механики в плоском пространстве-времени. Большое количество работ было посвящено теории полного разделения переменных с момента ее создания. Тем не менее, его можно считать полным только для свободного уравнения Гамильтона-Якоби. В работе [143] была решена классификационная задача полного разделения переменных для уравнения Гамильтона-Якоби во внешнем электромагнитном поле. Однако даже для свободного уравнения Клейна-Гордона-Фока проблема построения и классификации пространств Стакеля по-прежнему актуальна, поскольку уравнения, определяющие, согласно теореме Шаповалова, необходимые и достаточные условия для полного разделения переменных, еще не решены в общем случае. Более того, они не были решены для свободного уравнения Дирака-Фока, а также для всех квантовых уравнений движения во внешних полях калибровочной природы. Были получены лишь единичные результаты. Например, проблема полного разделения переменных в уравнении Клейна-Гордона-Фока была решена для пространств Эйнштейна и для вакуумных решений уравнений Эйнштейна [144, 145]. В работах [146, 147] рассматривались пересечения множеств однородных пространств и пространств Стакеля. Благодаря высокому уровню симметрии пространств Стакеля они остаются интересными объектами для исследований в различных областях теоретической и математической физики. Важное направление связано с изучением геометрии и физики в пространствах и полях, допускающих полное разделение переменных в квантовых уравнениях движения [148, 149].

Решения скалярных уравнений широко используются в космологии, в том числе при изучении проблемы темной материи и темной энергии [150]. Методы теории симметрии используются для обоснования выбора моделей расширенной гравитационной космологии [151] и нахождения реалистичных моделей [152, 153].

Наличие векторного и тензорного полей Киллинга в пространстве-времени позволяет разделять переменные в уравнении Эйнштейна, поскольку в привилегированной системе координат метрика содержит только функции, произвольно зависящие от одной из непривилегированных переменных. Тот факт, что метрика задана с указанной произвольностью, позволяет свести задачу интегрирования уравнений поля и уравнений движения к задаче решения функциональных уравнений и, как следствие, к задаче интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Та же произвольная природа свойственна пространственно-временному многообразию, когда группа движений действует просто транзитивно в подпространстве.

Гравитационные уравнения для пространственно-временных многообразий с такими группами также допускают разделение переменных, а решение уравнений поля сводится к классификации тензора энергии-импульса вещества, допускаемого данной геометрией. Методы теории полного разделения переменных в этих пространствах, как правило, неприменимы. Для них можно использовать метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных, разработанный в [154], с использованием некоммутативных алгебр операторов симметрии. Метод позволил значительно расширить классификацию внешних полей и римановых многообразий, допускающих существование точных решений уравнения Клейна-Гордона-Фока, и послужил основой для изучения квантовых эффектов в однородных пространствах. В частности, в [155], была получена полная классификация пространств, допускающих простое транзитивное действие групп движений, при условии, что уравнение Клейна-Гордона-Фока точно решается некоммутативными методами интегрирования. В [156, 157] аналогичная задача была решена для уравнения Дирака-Фока.

Все известные методы интегрирования основных дифференциальных уравнений математической физики основаны на полном сведении этих уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Редукция осуществляется с помощью операторов симметрии [158]. Для уравнений движения классической или квантовой частицы-образца во внешних электромагнитных и гравитационных полях операторы симметрии являются интегралами движения. Известно, что необходимым условием существования интегралов движения является существование пространственно-временной симметрии, задаваемой полями Киллинга.

Таким образом, проблема точного интегрирования тесно связана с изучением пространственно-временной симметрии. В настоящее время известны два метода точного интегрирования уравнений движения. Это методы коммутативного и некоммутативного интегрирования. Первый метод основан на теории полного разделения переменных и применим в пространствах Стакеля. Решения уравнений поля, которые до сих пор широко используются в теории гравитации, были построены на основе пространств Стакеля. Второй метод основан на использовании некоммутативных алгебр операторов симметрии, линейных по моментам и построенных с использованием векторных полей Киллинга. Как и в пространствах Стакеля, в пространствах с некоммутативной группой движений уравнения движения пробной частицы допускают полное сведение к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

2 ВЯЗКОСВЯЗАННЫЕ ЖИДКОСТИ В ТЕРМИНАХ ЛОГАРИФМИЧЕСКИ СКОРРЕКТИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

В настоящее время представляет большой интерес исследование влияния взаимодействия между ТЭ и ТМ на эволюцию Вселенной, особенно влияния различных форм взаимодействия на космологические параметры.

ТМ необходима в космологии для объяснения недостающей массы в галактиках и для того, чтобы сделать кривую вращения плоской. В стандартной модели Λ CDM ТМ изображается как жидкость без давления. ТЭ не взаимодействует с обычным веществом и обычно интерпретируется как космологическая постоянная (плотность энергии вакуума). Нынешнее ускоряющееся расширение Вселенной можно объяснить с помощью экзотической идеальной жидкости (ТЭ) с отрицательным давлением, которая удовлетворяет баротропному уравнению состояния [159, 160]. Наиболее общие модели темной жидкости можно описать с помощью неоднородного уравнения состояния [161-163].

Как известно, стандартная модель Λ CDM дает хорошие результаты на большом (космологическом) масштабе, но имеет проблемы на мелком (галактическом) масштабе. Эти проблемы связаны с предположением, что давление темной материи обычно меньше [164]. В этой модели давление жидкости моделируется эмпирической формулой, дающей давление деформированных изотропных кристаллических твердых тел [165]. Для того чтобы Вселенная изменилась под действием космологического расширения, необходимо, чтобы давление жидкости, описываемое уравнением состояния, было отрицательным [166-168] (отрицательное давление равно положительному растягивающему напряжению). Отрицательное давление в логарифмической модели степенного закона становится доминирующим, когда объем Вселенной превышает определенное значение. Этот сценарий соответствует модели логотропной ТЭ [169, 170]. Существуют режимы, в которых логотропная ТЭ со степенным законом эквивалентна логотропной ТЭ.

В работе [171], где были исследованы две модели: (1) космологическая постоянная + барионная материя + ТМ, и (2) ТЭ + барионная материя + ТМ. Сравнение с экспериментальными данными дало, как основной результат, который был одобрен в обоих случаях, что указывает на отклонение от обычной модели Λ CDM. Эта феноменологическая модель является прямой и полезной.

Взаимодействующая динамика предполагает непрерывный обмен энергией и/или тензором энергии импульса между темной энергией и темной материей [172] и модифицирует уравнения соответствия для ТМ $DM \equiv T_{\mu\nu}^{DM}$ в виде

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu}^{DM} = Q \quad (2.1)$$

и ТЭ $DM \equiv T_{\mu\nu}^{DE}$ в виде

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu}^{DE} = Q. \quad (2.2)$$

Функция Q характеризует взаимодействие между темными секторами, в которых $Q > 0$ представляет поток энергии и/или тензор энергии импульса от тёмной энергии к тёмной материи, в то время как $Q < 0$ означает, что поток энергии и/или тензор энергии импульса происходит от тёмной энергии к тёмной материи. Таким образом, выбираются различные функциональные формы для Q с правильным физическим размером и решаем соответствующие эволюционные уравнения. Выполняемая процедура аналогична той, при которой выбираются различные параметры для уравнения состояния. В литературе можно найти несколько разработок, в которых исследована полная динамика взаимодействующей модели [173, 174]. Ещё одним подходом к рассмотрению взаимодействия между двумя жидкостями являются, например, сигма модели [175, 176].

Наблюдения космического микроволнового фонового излучения и крупномасштабной структуры в хорошем приближении предсказывают, что наша Вселенная однородна и изотропна в самом большом масштабе, а в дальнейшем она почти пространственноплюская. Этот линейный элемент, описывающий такую Вселенную, известен как линейный элемент ФЛРУ, который принимает вид:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2.3)$$

где $a(t)$ является масштабным фактором, t - космологическим временем.

Кроме того, этот однородный и изотропный принцип накладывает ограничение на распределение материи в нашей Вселенной. Это говорит о том, что распределение материи должно быть идеального типа жидкости, которая принимает тензор энергии импульса как

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

где ρ, p соответственно обозначают плотность энергии и давление космической жидкости;

u_ν - четыре вектора скорости компонентов жидкости. Для нашей модели рассматривается общая теория относительности, описываемая уравнениями поля Эйнштейна

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

2.1 Модифицированное уравнение состояния степенной вязкой жидкости с логарифмической коррекцией

Как было сказано выше современная Вселенная находится в стадии ускоренного расширения [177]. Сейчас принято считать, что источниками такого расширения Вселенной выступает ТЭ, которая имеет большое отрицательное давление. В современной космологии для получения модели ТЭ и описания современных стадии эволюции Вселенной применяются различные обобщенные модели стандартной теории гравитации.

Первый подход основан на обобщении гравитационного члена в действии, одним из простейших теории является теория $f(R)$ гравитации [178-181], где R является скаляром кривизны пространства. Тензорная гравитация также является некой альтернативной теорией стандартной гравитации.

Изучим ТЭ в терминах логарифмически скорректированной жидкости со степенным законом. Уравнение состояния имеет вид [182].

$$p = A \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{-l} \ln \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right), \quad (2.6)$$

где ρ_* – эталонная плотность, которая отождествляется с планковской плотностью в: $\rho_p = c^5/\hbar G^2 \approx 5.16 \times 10^{99} \text{ g/m}^3$.

В настоящих обозначениях $A > 0$ представляет собой логотропную температуру, а $l = -\frac{1}{6} - \gamma_G$. Для $l = 0$ получаем уравнение состояния для логотропной космологической модели. Перепишем уравнение (2.6) с использованием обозначений модели логотропной ТЭ. Для этого выразим объем через массовую плотность, используя соотношение $V \approx \rho^{-1}$,

$$p(V) = -\beta \left(\frac{V}{V_0} \right)^{-(1/6) - \gamma_G} \ln \left(\frac{V}{V_0} \right), \quad (2.7)$$

где V_0 – объем, который различает барьер между различными знаками давления;

p – объемный модуль упругости;

β – размерный параметр Грюнайзена.

Модуль объемного сжатия показывает, насколько объем изменяется под действием внешних сил. Параметр γ_G в однородной и изотропной Вселенной является свободным параметром в теории. Если $V < V_0$, давление положительное для положительного модуля объемной упругости. Если $V > V_0$, давление становится отрицательным для положительного модуля объемной упругости.

Если давление темной жидкости удовлетворяет уравнению (2.7), то для обеспечения космологического ускорения объем должен преодолеть барьер

$V \approx V_0$. Следует различать три различных режима:

1. Область до прохождения барьера V_0 , когда $V < V_0$. В этой области давление положительное, и Вселенная замедляется. Это соответствует случаю без давления вещества в модели Λ CDM.

2. Регион где $V \approx V_0$. В этом случае происходит переход от замедления к ускорению.

3. Область после прохождения барьера V_0 , когда $V > V_0$. Затем давление становится отрицательным (положительное напряжение растяжения, как уже упоминалось), и жидкость начинает ускоряться.

Таким образом, в модели степенного закона с логарифмической коррекцией динамическая эволюция Вселенной описывается одной-единственной жидкостью, которая ускоряет Вселенную, когда ее объем проходит через барьер $V = V_0$. Это позволяет применить эту модель к описанию поздней Вселенной. Теперь изучим динамическую эволюцию Вселенной более подробно, используя уравнение состояния (2.6). Предположим, что Вселенная пространственно плоская, однородная и изотропная, и предполагаем, что существует объемная вязкость. Добавим к давлению следующий член

$$\zeta(H, t) = \xi_1(t)(3H)^n, \quad (2.8)$$

где $\zeta(H, t)$ объемная вязкость, которая зависит от параметра Хаббла H и времени t . Из термодинамических соображений следует, что $\zeta(H, t) > 0$. Расширенное уравнение состояния для степенной жидкости с логарифмической коррекцией принимает следующий вид

$$p = A \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{-l} \ln \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right) - 3H\zeta(H, t). \quad (2.9)$$

Это частный случай обобщенного уравнения состояния. Подводя итог, можно сказать, что его основой является логарифмически скорректированное степенное уравнение состояния жидкости в дополнение к члену, который учитывает эффекты объемной вязкости в космологии.

2.2 Вселенная заполнена вязкой связанной жидкостью с логарифмической коррекцией

Изучим Вселенную позднего времени, используя формализм двух вязких связанных жидкостей в пространственно-плоском пространстве-времени ФЛРУ [183]. Изучим динамику ускоряющегося расширения, используя логарифмически скорректированное степенное уравнение состояния в сочетании с ТМ. Поясним применение логарифмически скорректированной степенной модели. В этой модели есть только одна единственная жидкость, ответственная за ускоряющуюся Вселенную, когда объем Вселенной проходит через барьер

$V = V_0$. Модель не может описать раннюю Вселенную, потому что температура в этот период намного выше, чем температура Дебая для твердых тел. В период инфляции давление в жидкости становится меньше, как в случае модели логотропной темной энергии [184], в то время как в более поздние времена давление стремится к постоянному отрицательному значению, как и в случае, когда Вселенная заполнена темной жидкостью. В данном подходе, где учитывается вязкость, есть возможность получить более точную картину сингулярного поведения Вселенной в окрестностях Большого разрыва типа I или типов II, III и IV, классификация которого впервые дана в [185].

Рассмотрим Вселенную, заполненную двумя взаимодействующими компонентами: компонент степенного закона с логарифмической коррекцией, имеющий вязкость, и компонент ТМ в пространственно плоской Вселенной ФЛРУ с масштабным фактором. Фоновые уравнения

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = -Q, \quad (2.10)$$

$$\dot{\rho}_1 + 3H(\rho_1 + p_1) = Q, \quad (2.11)$$

и

$$\dot{H} = -\frac{k^2}{2}(\rho + p + \rho_1 + p_1). \quad (2.12)$$

Здесь $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ функция Хаббла, а $k^2 = 8\pi G$ вместе с G гравитационная постоянная Ньютона, p, ρ и p_1, ρ_1 давление и плотность энергии связанных жидкостей, а Q взаимодействующий член. Точка обозначает производную по космическому времени t . Космологическая постоянная Λ принимается равной нулю. Рассмотрим метрику ФЛРУ

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \sum_i dx_i^2. \quad (2.13)$$

Параметр Хаббла для метрики ФЛРУ равен

$$H^2 = \frac{k^2}{3}(\rho + \rho_1). \quad (2.14)$$

Одна из нерешенных проблем современной космологии - проблема совпадений в стандартной модели Λ CDM. Поскольку плотность ТЭ и плотность энергии материи в современной Вселенной имеют одинаковый порядок величины, можно предположить, что ТЭ и ТМ в некоторой степени взаимодействуют друг с другом. Точные космологические наблюдения показывают, что $r = \rho_1/\rho$ имеет порядок единицы. Предположим, что соотношение плотности r является постоянным (фиксированное соотношение

является следствием модели Λ CDM), в соответствии с чем уравнение переписывается как

$$\rho = \frac{3H^2}{k^2(1+r)}. \quad (2.15)$$

Далее исследуем космологические модели с различными видами взаимодействия.

2.3 Модель со связующим членом $Q = 3\lambda H(\rho + \rho_1) + \gamma(\dot{\rho} + \dot{\rho}_1)$

Рассмотрим связь

$$Q = 3\lambda H(\rho + \rho_1) + \gamma(\dot{\rho} + \dot{\rho}_1), \quad (2.16)$$

где параметры λ and γ безразмерные константы. Таким образом, взаимодействие между компонентами жидкости зависит от знака λ и γ . В настоящее время нет фундаментальной теории, определяющей функциональную форму связи; данное предположение связано с предположением, сделанным в [186]. Выберем вязкость пропорциональной параметру Хаббла,

$$\zeta(H, t) = 3\tau H, \quad (2.17)$$

где τ положительная константа. Используя первый член уравнений и уравнения, получим уравнение непрерывности для вязкой логарифмически скорректированной степенной жидкости

$$\tilde{\gamma}\dot{\rho} + 3H \left[A \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{-l} \ln \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right) + \theta \rho \right] = 0, \quad (2.18)$$

где $\theta = 1 - (1+r)(\lambda - 3\tau k^2)$ и $\tilde{\gamma} = 1 + \gamma(1+r)$. Предположим, что $\rho > \rho_*/2$ (плотность жидкости с логарифмической коррекцией по степенному закону выше, чем плотность Планка), и рассмотрим случай $l = -1$. Тогда уравнение упрощается до

$$\tilde{\gamma}\dot{\rho} + \frac{3H}{\rho_*} [A(\rho - \rho_*) + \theta\rho\rho_*] = 0. \quad (2.19)$$

Используя уравнение Фридмана, можем переписать уравнение в виде

$$\tilde{\gamma}\dot{H} + dH^2 - b = 0, \quad (2.20)$$

где $d = \frac{3}{2}(A + \theta\rho_*)$ и $b = \frac{1}{2}A(1+r)k^2\rho_*$.

Решением уравнения является

$$H(t) = \sqrt{\frac{b \exp(\tilde{\gamma}^{-1}\sqrt{bd}t) + C \exp(-\tilde{\gamma}^{-1}\sqrt{bd}t)}{d \exp(\tilde{\gamma}^{-1}\sqrt{bd}t) - C \exp(-\tilde{\gamma}^{-1}\sqrt{bd}t)}}, \quad (2.21)$$

где C произвольная постоянная. В частном случае $C = 1$ получаем

$$H(t) = \sqrt{\frac{b}{d}} \coth(\tilde{\gamma}^{-1}\sqrt{bd}t). \quad (2.22)$$

Таким образом, поскольку $H > 0$ Вселенная расширяется. Как видно из выражения (2.22) при космологическом времени $t \rightarrow 0$, подразумевается сингулярность типа Большой Разрыв. Масштабный фактор определяется как

$$a(t) = \exp\left[\int H(t)dt\right] = a_0 \sinh(\tilde{\gamma}^{-1}\sqrt{bd}t)^{\tilde{\gamma}d}, \quad (2.23)$$

где a_0 есть постоянная интегрирования. Вычисляем вторую производную от $a(t)$

$$\ddot{a}(t) = \tilde{\gamma}^{-2} \frac{b \cosh^2(\tilde{\gamma}^{-1}\sqrt{bd}t) - d\tilde{\gamma}^{-1}}{d \sinh^2(\tilde{\gamma}^{-1}\sqrt{bd}t)} a(t). \quad (2.24)$$

Следовательно, $\ddot{a}(t) = 0$ на $t_0 = \frac{1}{\tilde{\gamma}^{-1}\sqrt{bd}} \ln(\tilde{\gamma}^{-1/2}\sqrt{d} + \sqrt{\tilde{\gamma}^{-1}d - 1})$. В случае, когда $d < \tilde{\gamma}$ (т.е. если $A < 2\tilde{\gamma}/3 - \theta\rho_*$), тогда вторая производная от масштабного фактора положительна, и Вселенная испытывает ускоренное расширение, как это имеет место в настоящее время. С другой стороны, в случае, когда $d > \tilde{\gamma}$ для ранних времен $0 < t < t_0$ первая производная положительна, а вторая отрицательная, что означает замедляющееся расширение, в то время как для $t > t_0$ Вселенная вступает в ускоряющуюся эру. Таким образом, можем получить переход от эпохи доминирующей материи к эпохе темной энергии в соответствии с наблюдениями. Наконец, отметим, что из уравнения

$$\dot{H}(t) = -\frac{b\tilde{\gamma}^{-1}}{\sinh^2(\tilde{\gamma}^{-1}\sqrt{bd}t)}, \quad (2.25)$$

делаем вывод, поскольку $\dot{H} < 0$, что Вселенная не сверхускоряется (т.е. параметр уравнения состояния не является фантомом). В заключение отметим,

что в случае нулевой вязкости и отсутствия взаимодействия (т.е. для $\tau = 0$ и $\lambda = \gamma = 0$ и) получаем $\theta = \tilde{\gamma} = 1$, и поэтому приведенный выше анализ значительно упрощается. Завершим этот подраздел рассмотрением случая материи без давления ($p_1 = 0$). Тогда решение с членом связи и функцией Хаббла принимает вид

$$\rho_1(t) = \frac{C_1}{\left[\sinh^2(\tilde{\gamma}^{-1}\sqrt{bd}t)\right]^{\tilde{\lambda}\tilde{\gamma}d\tilde{\gamma}^*}}, \quad (2.26)$$

где $\tilde{\gamma}^* = 1 - \lambda(1 + 1/r)$, $\tilde{\lambda} = 1 - \lambda(1 + 1/r)$ и C_1 постоянная интегрирования. Таким образом, в более поздние времена, когда $t \rightarrow \infty$, получаем $\rho_1(t) \rightarrow 0$.

2.4 Модель взаимодействия с членом связи $Q = 3\alpha H \frac{\rho\rho_1}{(\rho + \rho_1)}$

Предположим, что взаимодействие между компонентами жидкости имеет вид

$$Q = 3\alpha H \frac{\rho\rho_1}{(\rho + \rho_1)}, \quad (2.27)$$

где параметр α - безразмерная постоянная. В терминах отношения плотностей энергии $r = \rho_1/\rho$ член взаимодействия можно записать

$$Q = \frac{3\alpha r}{1+r} H\rho. \quad (2.28)$$

Рассмотрим выражение для вязкости в случае и выберем функцию $\xi_1(t)$, которая будет линейно изменяться во времени

$$\xi_1(t) = ct + b, \quad (2.29)$$

с постоянными параметрами c, b . Тогда уравнение непрерывности для связанной жидкости со степенным законом с логарифмической коррекцией при наличии вязкости при условии $\rho > \rho_*/2$ примет вид

$$\dot{\rho} + 3H \left[A \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{-l} - A \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{-l-1} + (\tilde{c}t + \tilde{b})\rho \right] = 0, \quad (2.30)$$

где $\tilde{c} = -3c(1+r)k^2$ и $\tilde{b} = 1 - 3b(1+r)k^2 + \frac{3\alpha r}{1+r}$.

В случае $l = -1$, используя уравнение Фридмана, можно переписать как

$$2\dot{H} + 3\left(\tilde{c}t + \tilde{b} + \frac{A}{\rho_*}\right)H^2 = 0, \quad (2.31)$$

чьё решение

$$H(t) = \frac{4\tilde{c}}{3\left(\tilde{c}t + \tilde{b} + \frac{A}{\rho_*}\right)^2 + C_2}, \quad (2.32)$$

где C_1 – константа интегрирования.

Без ограничения общности остановимся на случае $C_1 = 0$. В этом случае $H > 0$ и, следовательно, Вселенная расширяется. Более того, H расходится за конечное время $t_0 = -\frac{1}{\tilde{c}}\left(\tilde{b} + \frac{A}{\rho_*}\right)$, и таким образом появляется сингулярность типа Большой Разрыв.

Масштабный фактор определяется выражением

$$a(t) = a_0 \exp\left[-\frac{4}{3}\left(\tilde{c}t + \tilde{b} + \frac{A}{\rho_*}\right)^{-1}\right], \quad (2.33)$$

где a_0 – постоянная интегрирования.

На рисунке (2.1) представлены зависимости масштабного фактора от космологического времени, построенные на основе выражения (2.23) красным цветом и выражения (2.33) синим цветом. На рисунке (2.1) зависимость масштабного фактора от космологического времени при взаимодействии между компонентами вязкой жидкости в виде $Q = 3\lambda H(\rho + \rho_1) + \gamma(\dot{\rho} + \dot{\rho}_1)$ изображена красной линией. Зависимость масштабного фактора от космологического времени при взаимодействии между компонентами вязкой жидкости в виде $Q = 3\alpha H \frac{\rho\rho_1}{(\rho + \rho_1)}$ представлена синей линией.

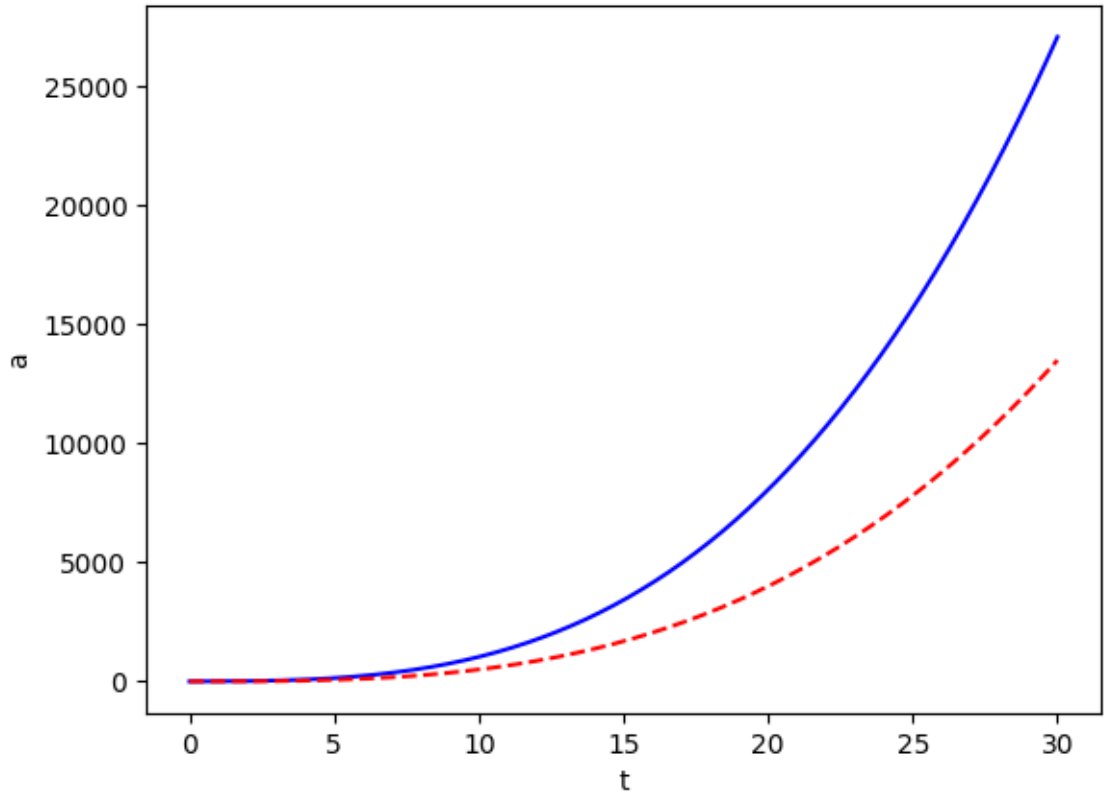


Рисунок 2.1 – Зависимость масштабного фактора от космологического времени, взаимодействие между компонентами вязкой жидкости для красной линии –

$$Q = 3\lambda H(\rho + \rho_1) + \gamma(\dot{\rho} + \dot{\rho}_1), \text{ для синей линии - } Q = 3\alpha H \frac{\rho\rho_1}{(\rho + \rho_1)}$$

На рисунке (2.1) представлена зависимость масштабного фактора a от космологического времени t , при значениях $\tilde{\gamma} = 2$, $\tilde{c} = 2$, $\tilde{b} = 0.5$, $b = 0.5$, $d = 7.8$, $a_0 = 1$.

Производная по времени от масштабного фактора равна

$$\dot{a}(t) = \frac{4/3}{\left(t + \frac{\tilde{b}}{\tilde{c}} + \frac{A}{\tilde{c}\rho_*}\right)^2} a(t). \quad (2.34)$$

Производная положительна, что означает, что Вселенная расширяется. Вторая производная

$$\ddot{a}(t) = \left[1 - \frac{3}{2} \left(\tilde{c}t + \tilde{b} + \frac{A}{\rho_*}\right)\right] H^2(t) a(t). \quad (2.35)$$

Следовательно, $\ddot{a}(t) = 0$ при $t_1 = \frac{1}{\tilde{c}} \left(\frac{2}{3\tilde{c}} - \tilde{b} - \frac{A}{\rho_*}\right)$.

Таким образом, в случае $\tilde{c} > 0$ для значений $t < t_1$, что $\ddot{a}(t) > 0$ и Вселенная переходит в позднюю ускоренную эру. Отметим, что в случае невязкой жидкости без взаимодействия с темной материей (параметры $c = b = 0$ и $\alpha = 0$), в случае $l = -1$ получаем

$$H(t) = \frac{2/3}{\left(1 + \frac{A}{\rho_*}\right)t + C_3}, \quad (2.36)$$

где C_3 – постоянная интегрирования. В частном случае, когда $C_3 = 0$, производная $H(t)$ по времени равна

$$\dot{H}(t) = -\frac{2}{3\left(1 + \frac{A}{\rho_*}\right)t^2}. \quad (2.37)$$

Так как $\dot{H} < 0$, Вселенная замедляется. Масштабный фактор меняется со временем как

$$a(t) = a_0 t^{\frac{2}{3(1+A/\rho_*)}}, \quad (2.38)$$

где a_0 – произвольная постоянная. Первая производная от масштабного фактора равна

$$\dot{a}(t) = \frac{2/3}{\left(1 + \frac{A}{\rho_*}\right)t} a(t). \quad (2.39)$$

Производная положительна, так что Вселенная расширяется. Таким образом, без учета вязкости степенной жидкости с логарифмической коррекцией и ее взаимодействия с темной материей, получили космологическую модель, которая в настоящее время не описывает ускоряющееся расширение Вселенной. Поэтому эта модель менее реалистична. Решение уравнения непрерывности для ТМ с членом связи и функцией Хаббла имеет вид

$$\rho_1(t) = \tilde{\rho}_0 \exp \left[\frac{A}{\tilde{c} C_4} \left(\frac{\alpha r}{1+r} - 1 \right) \arctan \left(\frac{\tilde{c} t + \tilde{b} + \frac{A}{\rho_*}}{C_4} \right) \right], \quad (2.40)$$

где $C_4 \neq 0$ - произвольная постоянная, а $\tilde{\rho}_0 = \rho_1(0)$.

На рисунке (2.2) представлены зависимости плотности от космологического времени, построенные на основе выражения (2.26) синим цветом и выражения (2.40) красным цветом. На рисунке (2.2) зависимость плотности энергии связанных жидкостей от космологического времени при взаимодействии между компонентами вязкой жидкости в виде $Q = 3\lambda H(\rho + \rho_1) + \gamma(\dot{\rho} + \dot{\rho}_1)$ изображена красной линией. Зависимость плотности энергии связанных жидкостей от космологического времени при взаимодействии между компонентами вязкой жидкости в виде $Q = 3\alpha H \frac{\rho\rho_1}{(\rho + \rho_1)}$ представлена синей линией.

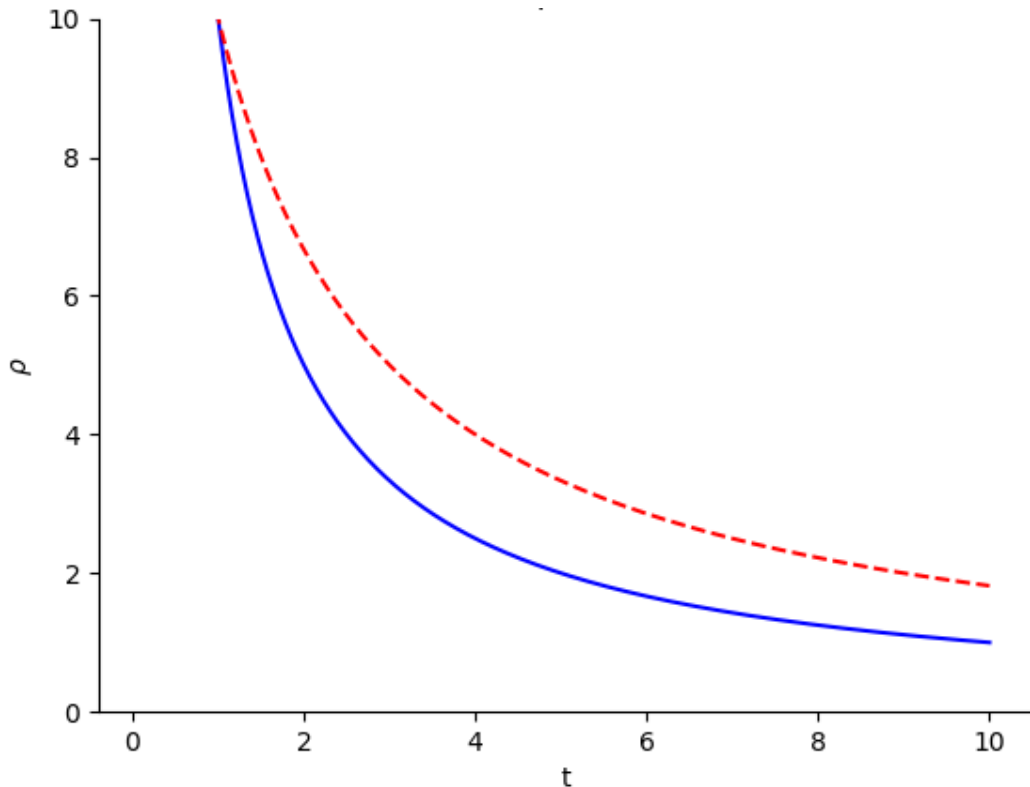


Рисунок 2.2 – Зависимость плотности энергии связанных жидкостей от космологического времени, взаимодействие между компонентами вязкой жидкости для красной линии – $Q = 3\lambda H(\rho + \rho_1) + \gamma(\dot{\rho} + \dot{\rho}_1)$,

для синей линии - $Q = 3\alpha H \frac{\rho\rho_1}{(\rho + \rho_1)}$

На рисунке (2.2) представлена зависимость плотности энергии связанных жидкостей ρ от космологического времени t , при значениях $\tilde{\gamma} = 2$, $\tilde{c} = 2$, $\tilde{b} = 1$, $b = 1$, $d = 9$, $\tilde{\lambda} = 2$.

В пределе $t \rightarrow \infty$ для поздней Вселенной имеем $\rho_1 \rightarrow \tilde{\rho}_0 \exp\left[\frac{2\pi}{\tilde{c}C_4}\left(\frac{\alpha r}{r+1} - 1\right)\right]$. Таким образом, представленная модель может

описывать эволюцию Вселенной в соответствии с наблюдениями, с переходом от эпохи преобладания материи к эпохе позднего ускорения. Следует отметить, что это поведение было получено без привлечения космологической постоянной, что является существенным преимуществом и одним из основных результатов настоящего параграфа.

Выводы по второму разделу

В этом разделе была рассмотрена модель Вселенной темной энергии, основанная на логарифмически скорректированном степенном модифицированном уравнении состояния, при наличии объемной вязкости ζ , в однородном и изотропном пространственно-плоском пространство-время ФЛРУ. Жидкость с логарифмической коррекцией по степенному закону обладает свойствами, аналогичными свойствам кристаллических твердых тел при изотропных деформациях, даже в случаях, когда давление отрицательное. Этот формализм позволил моделировать модель и объяснять ускоряющееся расширение поздней Вселенной в терминах логотропной темной жидкости. Рассмотрено взаимодействие с ТМ и получены аналитические выражения для плотности энергии обеих жидкостей. Основываясь на выражениях для масштабного фактора $a(t)$ и его первой и второй производных, выделили режимы разного поведения: либо расширение с ускорением (как в настоящее время), либо расширение с замедлением. Было показано, что в отличие от невязкой логарифмически скорректированной степенной жидкости без взаимодействия с темной материей, модель более подходит для описания нынешней Вселенной.

Показано, что взаимодействие между ТЭ, обладающей вязкостью жидкости, и ТМ будет влиять на характер сингулярностей различных типов. Показано, что космологический сценарий со связанными темными жидкостями может дать начало Вселенной, которая переживает переход от эпохи доминирования материи к эпохе позднего ускорения. Согласие с данными наблюдений, в частности с данными о сверхновых звездах Ia (Sn Ia) и функцией Хаббла, как подтверждено в, является следствием логарифмической поправки и условий вязкости. Таким образом, исследованы различные режимы ускоренного расширения и пришли к выводу, что это описание поздней Вселенной может привести к интересным результатам.

С использованием двухкомпонентной вязкой жидкости в пространственно-плоском пространстве-времени ФЛРУ изучена Вселенная позднего времени. С этой целью использовано логарифмически скорректированное степенное уравнение состояния в сочетании с ТМ. Виды взаимодействия между компонентами вязкой жидкости определены в виде

$Q = 3\lambda H(\rho + \rho_1) + \gamma(\dot{\rho} + \dot{\rho}_1)$ и $Q = 3\alpha H \frac{\rho\rho_1}{(\rho + \rho_1)}$. На основе того, что вторая производная от масштабного фактора положительна и в более поздние времена, когда $t \rightarrow \infty$, получено $\rho_1(t) \rightarrow 0$, показана динамика ускоряющегося расширения Вселенной.

3 РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ H_0 НАПРЯЖЕННОСТИ В $f(T)$ ГРАВИТАЦИИ С ПОМОЩЬЮ БАЙЕСОВСКОГО МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Методы БМО и сильное линзирование по временной задержке (SLTD) используются для решения проблемы напряженности H_0 в $f(T)$ гравитации. Сила БМО основана на использовании основанного на модели процесса генерации, который уже играет важную роль в различных областях космологии и астрофизики. Рассматриваются три реалистичные модели $f(T)$ гравитации: степенная, экспоненциальная и квадратичная экспоненциальная модели. Изученные ограничения и соответствующие результаты указывают на то, что экспоненциальная модель с уравнением в виде $f = \alpha T_0 \left(1 - e^{-\beta T/T_0}\right)$ способна решить проблему напряженности H_0 в $f(T)$ гравитации достаточно эффективно. Сила прогнозирования и надежность метода демонстрируются с учетом различных диапазонов красного смещения и параметров для задействованных линз и источников. Эти значения могут сильно повлиять на понимание напряженности H_0 в $f(T)$ гравитации, как это происходит в случае рассматриваемой модели. Результирующие ограничения метода обучения в конечном итоге проверяются с использованием (OHD) [187, 188].

Было предложено несколько модифицированных теорий. Например, теория $f(R)$ является простейшим расширением ОТО, в котором вместо скаляра Риччи R в действии Эйнштейна-Гильберта рассматривается произвольная функция $f(R)$ [189, 190]. Другой интересной модификацией является теория $f(T)$, в которой гравитационное взаимодействие описывается кручением T вместо тензора кривизны. В результате связь Леви-Чивиты заменяется связью Вейценбека в лежащем в основе пространстве-времени Римана-Картана. Важным преимуществом $f(T)$ является то, что его уравнения поля представлены в виде дифференциальных уравнений второго порядка, что значительно снижает математические трудности моделей по сравнению с теориями $f(R)$, где уравнение поля приводит к дифференциальным уравнениям четвертого порядка. Более того, космологические следствия теорий $f(T)$ уже проявились в нескольких моделях, предложенных до сих пор. Эти модели не только способны объяснить нынешнее ускоренное космическое расширение, но и предлагают альтернативы инфляции. Несмотря на все это, теория $f(T)$ гравитации и ее космологические приложения вызвали большой интерес в недавней литературе [191-194].

Как упоминали ранее важно изучить и убедиться, что созданные модели прошли космологические и астрофизические испытания, особенно сейчас, когда работают различные наблюдательные миссии, предоставляющие много новых данных. Более того, крайне важно ограничить параметры модели и изучить надлежащие последствия, потому что ограничения на фоновую динамику необходимы для понимания природы (взаимодействующей) ТЭ,

формирования структуры и будущих проблем сингулярности. В этом отношении разработка и использование методов, которые позволяют получать реконструкции (включая ограничения) с помощью процедуры обучения независимым от модели способом, например, непосредственно изданных наблюдений, имеют большое значение.

Одним из наиболее популярных и широко используемых примеров таких методов в космологии являются гауссовские процессы [195, 196], которые основаны на специфическом алгоритме МО, указывающем, как в целом МО можно использовать в космологии, астрофизике или в любой другой области науки, где данный анализ имеет решающее значение. В общем, алгоритмы МО - это подходы, требующие больших объемов данных, требующие огромных объемов данных для выполнения процессов обучения и проверки. Они также имеют некоторые недостатки, которые в некоторых случаях могут привести к катастрофическим результатам. Другими словами, МО может стать бесполезным в определенных ситуациях, в частности, если собранные данные имеют какую-то неотъемлемую проблему. Предвзятость является одной из причин того, что подход к МО может потерпеть неудачу. К сожалению, предвзятость является существенной, а иногда и неизбежной частью процесса сбора данных. Это может исходить из понимания реальности или модели, которая используется для представления реальности. Предвзятость может возникнуть во многих ситуациях, в том числе связанных с рассуждениями в условиях неопределенности, активно изучаемых в робототехнике, динамических транспортных средствах и моделировании различных автономных систем. В результате на протяжении многих лет исследователи компьютерных наук и других областей науки разработали множество методов для уменьшения предвзятости и повышения надежности алгоритмов МО. Среди них интересным примером является БМО. Он использует генеративные процессы на основе моделей для улучшения проблем с данными, среди прочего. БМО – инструмент для изучения космологии.

Также этот раздел посвящен формулировке конкретной проблемы, которая мотивирует настоящее исследование. Это относительно новое явление, известное в литературе как напряженность H_0 : разница между ранними измерениями КМФ и БАК и поздними (например, сверхновые типа Ia) значения постоянной Хаббла H_0 .

В частности, согласно результатам Planck 2018 [197], в плоской модели Λ CDM значение постоянной Хаббла составляет $H_0 = 67.27 \pm 0.60 \frac{\text{км}}{\text{сМпк}}$ при доверительном уровне 1σ , в то время как команда SHOES подсчитала, что $H_0 = 73.2 \pm 1.3 \frac{\text{км}}{\text{сМпк}}$ [198], который демонстрирует напряжение $4,14\sigma$. Это важное противоречие побудило исследователей искать различные решения, начиная от указаний на новую физику и заканчивая возможными скрытыми источниками систематических ошибок и искажений в данных наблюдений. Действительно, чтобы понять источник такого несоответствия, которое может бросить вызов

модели Λ CDM, были использованы другие независимые источники [199, 200] наблюдений для определения значения H_0 .

Например, системы сильного гравитационного линзирования являются мощными и независимыми кандидатами для оценки параметра Хаббла и его текущей напряженности H_0 . Открытие первого события слияния двойной нейтронной звезды и обнаружение связанного с ним электромагнитного аналога сделали это возможным, предоставив оценку постоянной Хаббла около $H_0 = 70 \pm 12 \frac{\text{км}}{\text{сМпк}}$ [201]. Более того, анализ четырех хорошо измеренных систем из программы линзирования предоставил множество данных о постоянной Хаббла при условии плоской Λ CDM космологии [202, 203]. Несмотря на то, что эти ограничения слабее, чем у наблюдений SN Ia и КМФ, ожидается, что они улучшатся с обнаружением новых событий слияния с соответствующим электромагнитным аналогом [204, 205]. Ожидается, что, в частности, наблюдения систем с линзами в ходе будущих съемок, таких как Большой синоптический обзорный телескоп (LSST) [206], значительно увеличат количество хорошо измеренных систем с сильными линзами [207]. Увеличенное число наблюдаемых источников с линзами также позволит ограничить нестандартные модели космологии.

В системах с сильным гравитационным линзированием общая временная задержка между двумя изображениями, то есть между двумя событиями гравитационной волны, i и j , определяется следующим образом [208]

$$\Delta t_{i,j} = D_{\Delta t} (1 + z_s) \Delta \phi_{i,j},$$

$$\Delta \phi_{i,j} = \left[(\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\beta})^2 / 2 - \psi(\boldsymbol{\theta}_i) - (\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\beta})^2 / 2 + \psi(\boldsymbol{\theta}_j) \right], \quad (3.1)$$

где $\Delta \phi_{i,j}$ – разница между потенциалами Ферма при разных угловых положениях изображения $\boldsymbol{\theta}_i, \boldsymbol{\theta}_j$ и $\boldsymbol{\beta}$, обозначающие источник положения;

а ψ – потенциал линзирования [209, 210].

С другой стороны, измеренная временная задержка между изображениями с сильной линзой $\Delta t_{i,j}$ в сочетании с красными смещениями объектива z_s и источника z_s и разностью потенциалов Ферма $\Delta \phi_{i,j}$, определяемый распределением массы объектива и положением изображения, позволяет определить расстояние временной задержки $D_{\Delta t}$. Эта величина, представляющая собой комбинацию трех угловых диаметральных расстояний, рассчитывается

$$D_{\Delta t} = (1 + z_l) \frac{D_l D_s}{D_{ls}}, \quad (3.2)$$

где D_l, D_s и D_{ls} обозначают расстояния по угловому диаметру до объектива, источника и между объективом и источником соответственно. На самом деле,

уравнение показывает хорошую взаимосвязь в сочетании с БМО, которая позволяет ограничивать космологические модели, не полагаясь на физику или наблюдения модели линзирования и потенциала Ферма. В результате, имея только космологические модели и принимая во внимание, что в плоской Вселенной ФЛРУ расстояние по угловому диаметру составляет

$$D(z') = \frac{1}{H_0(1+z)} \int_0^{z'} \frac{dz'}{E(z', r)}, \quad (3.3)$$

где $E(z', r)$ определяется как безразмерный параметр Хаббла, и можно узнать ограничения на параметры модели, встроенные в него. Будущие данные наблюдений, поступающие от сигналов гравитационной волны (ГВ) с линзами вместе с соответствующей им электромагнитной волны (ЭМВ), дают некоторые новые и важные идеи, которые могут привести к уменьшению разницы между ранними измерениями и поздними значениями постоянной Хаббла H_0 . Поэтому стоит исследовать их влияние на ТЭ и модифицированные теории гравитации.

Были использованы доступные в настоящее время данные наблюдений Хаббла (ОНД), используемые для проверки результатов анализа с помощью БМО. В таблице (3.1) приведены значения параметра Хаббла $H(z)$ и его неопределенность σ_H . Верхняя панель соответствует 30 образцам, полученным с помощью метода дифференциального возраста. На нижней панели - 10 образцов, полученных методом БАК. В таблице (3.1) приведена более подробная информация об этих данных.

Таблица 3.1 – Доступные в настоящее время ОНД, используемые для проверки результатов нашего анализа с помощью БМО

z	$H(z)$	σ_H	z	$H(z)$	σ_H
1	2	3	4	5	6
0.070	69	19.6	0.4783	80.9	9
0.090	69	12	0.480	97	62
0.120	68.6	26.2	0.593	104	13
0.170	83	8	0.680	92	8
0.179	75	4	0.781	105	12
0.199	75	5	0.875	125	17
0.200	72.9	29.6	0.880	90	40
0.270	77	14	0.900	117	23
0.280	88.8	36.6	1.037	154	20
0.352	83	14	1.300	168	17
0.3802	83	13.5	1.363	160	33.6
0.400	95	17	1.4307	177	18
0.4004	77	10.2	1.530	140	14
0.4247	87.1	11.1	1.750	202	40

Продолжение таблицы 3.1

1	2	3	4	5	6
0.44497	92.8	12.9	1.965	186.5	50.4
0.24	79.69	2.65	0.60	87.9	6.1
0.35	84.4	7	0.73	97.3	7.0
0.43	86.45	3.68	2.30	224	8
0.44	82.6	7.8	2.34	222	7
0.57	92.4	4.5	2.36	226	8

В исследовании преследуются две цели. Во-первых, используются преимущества, предоставляемые БМО, для ограничения различных моделей $f(T)$, используя физику систем гравитационные волны + электромагнитные волны (ГВ + ЭМВ). Это первый случай, когда БМО и систем ГВ + ЭМВ были задействованы в изучении моделей $f(T)$. В этом случае генеративный процесс, используемый в БМО, будет основан на применении уравнений (3.2) и (3.3), таким образом устанавливая прямую связь между космологией и SLTD. Рассмотрено решение проблемы напряженности H_0 в $f(T)$ гравитации. Однако, учитывая конкретные аспекты метода, должны ограничиться рассмотрением только трех конкретных реалистичных моделей $f(T)$. Подчеркнем, принимая во внимание конкретные аспекты нашего анализа, что полученные ограничения будут подтверждены с использованием ОНД, полученных с помощью космических хронометров и данных БАК.

Проверка результатов БМО с ОНД, представленных в нашем исследовании, демонстрирует, что можно надежно изучить возможные отклонения между $H(z)$ и будущими данными SLTD. Более того, поскольку БМО использует процесс генерации на основе моделей, в целях прогнозирования можно рассматривать различные ситуации, чтобы понять предстоящие данные, которые могут повлиять на наше понимание напряженности H_0 . В частности, рассматривая различные диапазоны красного смещения и числа для линз и источников, стало известно, что будущие данные SLTD могут сильно повлиять на понимание напряженности H_0 . Обсуждаемые прогнозы фоновой динамики могут быть подтверждены новыми миссиями и данными в ближайшем будущем, что подтвердит прогнозирование и надежность метода, используемого в нашем анализе.

В разделе приводятся краткое описание космологической динамики в рамках $f(T)$ теории и вводятся три конкретные $f(T)$ модели, которые должны быть ограничены с помощью БМО. Также раздел содержит методологию подхода БМО, используемого в анализе.

3.1 Теоретические основы и модели

В этом разделе представим фоновую динамику $f(T)$ космологии и три реалистичные модели, которые ограничиваются в данном исследовании.

3.1.1 Фоновая динамика $f(T)$ гравитации

Калибровочное преобразование подразумевает локальное преобразование касательно-пространственных координат в виде

$$\delta x^i = \delta \alpha^j P_j x^i, \quad (3.4)$$

здесь P_i есть генератор, который определяется $P_i = \partial / \partial x^i$, а $\delta \alpha^i$ есть соответствующие бесконечно малые параметры. Под A^j_μ обозначим калибровочные потенциалы, где для обозначения индексов пространства – времени применим греческий алфавит ($\mu, \nu, \rho, \dots = 0, 1, 2, 3$), а для индексов касательного пространства – латинский алфавит ($i, j, k, \dots = 0, 1, 2, 3$).

Далее запишем калибровочные ковариантные производные поля материи Ψ в виде

$$\mathcal{D}_\mu \Psi = e^j_\mu \partial_i \Psi, \quad (3.5)$$

здесь

$$e^j_\mu = \partial_\mu x^j + A^j_\mu, \quad (3.6)$$

есть нетривиальная тетрада поля со скоростью равной $c = 1$. Учитывая (3.4) для $\mathcal{D}_\mu \Psi$ следует выражение для калибровочного преобразования потенциалов

$$A^{j'}_\mu = A^j_\mu - \partial_\mu \delta \alpha^j. \quad (3.7)$$

Известно, что в абелевых калибровочных теориях, напряженность поля определяется

$$F^j_{\mu\nu} = \partial_\mu A^j_\nu - \partial_\nu A^j_\mu. \quad (3.8)$$

Также напряженность поля удовлетворяет соотношению

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \Psi = F^j_{\mu\nu} P_j \Psi. \quad (3.9)$$

Известно, что в касательном пространстве индексы поднимают и опускают с применением метрики Минковского $\eta_{ij} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$, индексы пространства – времени – с применением римановой метрики в виде

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ij} e^i_\mu e^j_\nu. \quad (3.10)$$

Телепараллельная структура пространства – времени индуцируется

нетривиальным тетрадным полем. Используя нетривиальные тетрады, можно найти так называемые связности Вейценбока

$$\hat{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} = e_i^{\rho} \partial_{\nu} e^i_{\mu}, \quad (3.11)$$

которые определяют только кручение. Ковариантная производная Вейценбока тетрадного поля равна

$$\nabla_{\nu} e^i_{\mu} \equiv \partial_{\nu} e^i_{\mu} - \hat{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} e^i_{\rho} = 0. \quad (3.12)$$

и называется абсолютным условием параллельности. Найдём кручение через связности Вейценбока:

$$T^{\rho}_{\mu\nu} = \hat{\Gamma}^{\rho}_{\nu\mu} - \hat{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}, \quad (3.13)$$

видно, что сила поля гравитации определяется как кручение на тетрадной основе

$$F^i_{\mu\nu} = e^i_{\rho} T^{\rho}_{\mu\nu}. \quad (3.14)$$

Для линейной связности без кручения, то есть для связности Леви-Чивита для метрики (3.10), нетривиальное тетрадное поле запишется в виде

$$\overset{\circ}{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} [\partial_{\mu} g_{\rho\nu} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}]. \quad (3.15)$$

Связности Вейценбока и Леви-Чивиты определяются в виде

$$\hat{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} + K^{\rho}_{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

здесь тензор конторсии выражается в виде

$$K^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T^{\rho}_{\mu\nu} + T^{\rho}_{\nu\mu} - T^{\rho}_{\nu\mu}). \quad (3.17)$$

Теперь перепишем выражение (3.17) в виде

$$K^{\mu\nu}_{\rho} = -\frac{1}{2} (T^{\mu\nu}_{\rho} - T^{\nu\mu}_{\rho} - T^{\rho}_{\mu\nu}). \quad (3.18)$$

Поскольку ковариантная производная Вейценбока тождественно равна нулю

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} = \partial_{\mu} \hat{\Gamma}^{\rho}_{\lambda\nu} + \hat{\Gamma}^{\rho}_{\sigma\mu} \hat{\Gamma}^{\sigma}_{\lambda\nu} - (\mu \leftrightarrow \nu) \equiv 0. \quad (3.19)$$

Подставляя $\hat{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}$ в уравнение (3.16), получаем

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} = \overset{\circ}{R}^{\rho}_{\lambda\mu\nu} + Q^{\rho}_{\lambda\mu\nu} \equiv 0, \quad (3.20)$$

где $\overset{\circ}{R}^{\rho}_{\lambda\mu\nu}$ – кривизна связности Леви-Чивиты.

Вклад $Q^{\rho}_{\lambda\mu\nu}$, который обусловлен связностью Вейценбока, определяется

$$Q^{\rho}_{\lambda\mu\nu} = D_{\mu}K^{\rho}_{\lambda\nu} - D_{\nu}K^{\rho}_{\lambda\mu} + K^{\sigma}_{\lambda\nu}K^{\rho}_{\sigma\mu} - K^{\sigma}_{\lambda\mu}K^{\rho}_{\sigma\nu}, \quad (3.21)$$

где D_{μ} – ковариантная производная типа Леви-Чивиты в терминах связности Вейценбока, действуя которой на пространственно-временной вектор V^{μ} имеем

$$D_{\rho}V^{\mu} \equiv \partial_{\rho}V^{\mu} + (\hat{\Gamma}^{\mu}_{\lambda\rho} - K^{\mu}_{\lambda\rho})V^{\lambda}. \quad (3.22)$$

Отсюда следует что тензор кривизны $R^{\rho}_{\lambda\mu\nu}$ тождественно равен нулю в телепараллель гравитации тетрадное поле задаётся на ортонормальном базисе касательного пространства в каждой точке x^{μ} многообразия, т.е., $e_i \cdot e_j = \eta_{ij}$. Тогда, используя вектор тетрады компонентами, метрический тензор запишем в виде

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ij}e^i_{\mu}(x)e^j_{\nu}(x). \quad (3.23)$$

Для компонентов тетрады имеем соотношения $e^{\mu}_i e^i_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$ и $e^{\mu}_i e^j_{\mu} = \delta^j_i$.

В $f(T)$ гравитации связность Вейценбока определяется в виде

$$\hat{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv e^{\lambda}_i \partial_{\nu}e^i_{\mu} = -e^i_{\mu} \partial_{\nu}e^{\lambda}_i. \quad (3.24)$$

Тензор кручения можно записать в виде

$$T^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv \hat{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^{\lambda}_{\nu\mu} = e^{\lambda}_i (\partial_{\mu}e^i_{\nu} - \partial_{\nu}e^i_{\mu}). \quad (3.25)$$

Для введения суперпотенциала используется тензор конторсии $K^{\mu\nu}_{\rho}$

$$S^{\mu\nu}_{\rho} = \frac{1}{2}(K^{\mu\nu}_{\rho} + \delta^{\mu}_{\rho}T^{\alpha\nu}_{\alpha} - \delta^{\nu}_{\rho}T^{\alpha\mu}_{\alpha}). \quad (3.26)$$

Скаляр кручения находим в виде

$$T \equiv S^{\mu\nu}_{\rho} T^{\rho}_{\mu\nu}. \quad (3.27)$$

Действие для $f(T)$ гравитации выражается в виде

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int e F(T) d^4 x, \quad (3.28)$$

здесь $e \equiv \det(e^i_\mu) = \sqrt{-g}$ - детерминант метрического тензора;

$F(T)$ - некоторая функция от скаляра кручения T .

Варьируя действия (3.28) по тетраде e^i_ν получим уравнение движения в виде

$$e^{-1} \partial_\mu (e e^{\rho}_i S^{\mu\nu}) [1 + F_T] - e^{\lambda}_i T^{\rho}_{\mu\lambda} S^{\nu\mu}_\rho F_T + e^{\rho}_i S^{\mu\nu}_\rho (\partial_\mu T) F_{TT} + \frac{1}{4} e^{\nu}_\lambda [T + F(T)] = 4\pi G e^{\rho}_i T^{(m)\nu}_{\rho}, \quad (3.29)$$

где F_T - первая производная $F(T)$ по скаляру кручения T ;

F_{TT} - вторая производная $F(T)$ по скаляру кручения T ;

$T^{(m)\nu}_{\rho}$ - тензор энергии-импульса.

Космология $f(T)$ гравитации в контексте однородной, изотропной и пространственно плоской Вселенной, характеризуемой $e^A_\mu = \text{diag}(1, a, a, a)$, описывается геометрией ФЛРУ

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.30)$$

здесь t является космологическим временем.

Метрика ФЛРУ имеет вид

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3.31)$$

и для (3.27) имеем следующие выражения

$$e^i_\mu = \text{diag}(-1, a(t), a(t), a(t)), \quad (3.32)$$

и

$$e^\mu_i = \text{diag}\left(-1, \frac{1}{a(t)}, \frac{1}{a(t)}, \frac{1}{a(t)}\right). \quad (3.33)$$

Применяя уравнения (3.32), (3.33) и (3.25), определим ненулевые компоненты тензора кручения в виде

$$T^1_{10} = e^1_i (\partial_1 e^i_0 - \partial_0 e^i_1) = e^1_1 (\partial_1 e^1_0 - \partial_0 e^1_1) = -\frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.34)$$

$$T^2_{20} = e_i^2 (\partial_0 e_0^i - \partial_0 e_2^i) = e_2^2 (\partial_0 e_0^2 - \partial_0 e_2^2) = -\frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.35)$$

$$T^3_{30} = e_i^3 (\partial_3 e_0^i - \partial_0 e_3^i) = e_i^3 (\partial_3 e_0^3 - \partial_0 e_3^3) = -\frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.36)$$

$$T^1_{01} = e_i^1 (\partial_0 e_1^i - \partial_1 e_0^i) = e_1^1 (\partial_0 e_1^1 - \partial_1 e_0^1) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.37)$$

$$T^2_{02} = e_i^2 (\partial_0 e_2^i - \partial_2 e_0^i) = e_2^2 (\partial_0 e_2^2 - \partial_2 e_0^2) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.38)$$

$$T^3_{03} = e_i^3 (\partial_0 e_3^i - \partial_3 e_0^i) = e_3^3 (\partial_0 e_3^3 - \partial_3 e_0^3) = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.39)$$

Используя уравнения (3.34) - (3.39) и уравнение (3.18) находим отличные от нуля выражения компоненты тензора конторсии

$$K^{01}_1 = -\frac{1}{2}(T^{01}_1 - T^{10}_1 - T_1^{01}) = -\frac{1}{2}(T^0_{11}g^{11} - T^1_{01}g^{00} - T^1_{01}g_{11}g^{00}g^{11}) = -\frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.40)$$

$$K^{02}_2 = -\frac{1}{2}(T^{02}_2 - T^{20}_2 - T_2^{02}) = -\frac{1}{2}(T^0_{22}g^{22} - T^2_{02}g^{00} - T^2_{02}g_{22}g^{00}g^{22}) = -\frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.41)$$

$$K^{03}_3 = -\frac{1}{2}(T^{03}_3 - T^{30}_3 - T_3^{03}) = -\frac{1}{2}(T^0_{33}g^{33} - T^3_{03}g^{00} - T^3_{03}g_{33}g^{00}g^{33}) = -\frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.42)$$

$$K^{10}_1 = -\frac{1}{2}(T^{10}_1 - T^{01}_1 - T_1^{10}) = -\frac{1}{2}(T^1_{01}g^{00} - T^0_{11}g^{11} - T^1_{10}g_{11}g^{11}g^{00}) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.43)$$

$$K^{20}_2 = -\frac{1}{2}(T^{20}_2 - T^{02}_2 - T_2^{20}) = -\frac{1}{2}(T^2_{02}g^{00} - T^0_{22}g^{22} - T^2_{20}g_{22}g^{22}g^{00}) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.44)$$

$$K^{30}_3 = -\frac{1}{2}(T^{30}_3 - T^{03}_3 - T_3^{30}) = -\frac{1}{2}(T^3_{03}g^{00} - T^0_{33}g^{33} - T^3_{30}g_{33}g^{33}g^{00}) = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.45)$$

Используя соотношение (3.26) и уравнения (3.40)-(3.45) находим компоненты $S_{\rho}^{\mu\nu}$ в виде

$$\begin{aligned}
S_1^{01} &= -\frac{1}{2}(K_{11}^{01} + \delta_1^0 T_{\theta}^{\theta 1} - \delta_1^1 T_{\theta}^{\theta 0}) = \\
&= -\frac{1}{2}(K_{11}^{01} - \delta_1^1 T_{00}^{00} - \delta_1^1 T_{11}^{10} - \delta_1^1 T_{22}^{20} - \delta_1^1 T_{33}^{30}) = \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a} - \delta_1^1 T_{01}^1 \mathbf{g}^{00} - \delta_1^1 T_{02}^2 \mathbf{g}^{00} - \delta_1^1 T_{03}^3 \mathbf{g}^{00}\right) = \frac{\dot{a}}{a},
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
S_2^{02} &= -\frac{1}{2}(K_{22}^{02} + \delta_2^0 T_{\theta}^{\theta 2} - \delta_2^2 T_{\theta}^{\theta 0}) = \\
&= -\frac{1}{2}(K_{22}^{02} - \delta_2^2 T_{00}^{00} - \delta_2^2 T_{11}^{10} - \delta_2^2 T_{22}^{20} - \delta_2^2 T_{33}^{30}) = \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a} - \delta_2^2 T_{01}^1 \mathbf{g}^{00} - \delta_2^2 T_{02}^2 \mathbf{g}^{00} - \delta_2^2 T_{03}^3 \mathbf{g}^{00}\right) = \frac{\dot{a}}{a},
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
S_3^{03} &= -\frac{1}{2}(K_{33}^{03} + \delta_3^0 T_{\theta}^{\theta 3} - \delta_3^3 T_{\theta}^{\theta 0}) = \\
&= -\frac{1}{2}(K_{11}^{01} - \delta_3^3 T_{00}^{00} - \delta_3^3 T_{11}^{10} - \delta_3^3 T_{22}^{20} - \delta_3^3 T_{33}^{30}) = \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a} - \delta_3^3 T_{01}^1 \mathbf{g}^{00} - \delta_3^3 T_{02}^2 \mathbf{g}^{00} - \delta_3^3 T_{03}^3 \mathbf{g}^{00}\right) = \frac{\dot{a}}{a},
\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}
S_1^{10} &= -\frac{1}{2}(K_{11}^{10} + \delta_1^1 T_{\theta}^{\theta 0} - \delta_1^0 T_{\theta}^{\theta 1}) = \\
&= -\frac{1}{2}(K_{11}^{10} + \delta_1^1 T_{00}^{00} + \delta_1^1 T_{11}^{10} + \delta_1^1 T_{22}^{20} + \delta_1^1 T_{33}^{30}) = \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \delta_1^1 T_{01}^1 \mathbf{g}^{00} + \delta_1^1 T_{02}^2 \mathbf{g}^{00} + \delta_1^1 T_{03}^3 \mathbf{g}^{00}\right) = -\frac{\dot{a}}{a},
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
S_2^{20} &= -\frac{1}{2}(K_{22}^{20} + \delta_2^2 T_{\theta}^{\theta 0} - \delta_2^0 T_{\theta}^{\theta 2}) = \\
&= -\frac{1}{2}(K_{22}^{20} + \delta_2^2 T_{00}^{00} + \delta_2^2 T_{11}^{10} + \delta_2^2 T_{22}^{20} + \delta_2^2 T_{33}^{30}) = \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \delta_2^2 T_{01}^1 \mathbf{g}^{00} + \delta_2^2 T_{02}^2 \mathbf{g}^{00} + \delta_2^2 T_{03}^3 \mathbf{g}^{00}\right) = -\frac{\dot{a}}{a},
\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
S_3^{30} &= -\frac{1}{2}(K_{33}^{30} + \delta_3^3 T_{\theta}^{\theta 0} - \delta_3^0 T_{\theta}^{\theta 3}) = \\
&= -\frac{1}{2}(K_{33}^{30} + \delta_3^3 T_{00}^{00} + \delta_3^3 T_{11}^{10} + \delta_3^3 T_{22}^{20} + \delta_3^3 T_{33}^{30}) = \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \delta_3^3 T_{01}^1 \mathbf{g}^{00} + \delta_3^3 T_{02}^2 \mathbf{g}^{00} + \delta_3^3 T_{03}^3 \mathbf{g}^{00}\right) = -\frac{\dot{a}}{a}.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Применяя ненулевые компоненты тензора $S_{\rho}^{\mu\nu}$ и тензора кручения $T_{\mu\nu}^{\rho}$, из выражения (3.27) определим скаляр кручения в виде

$$T = -6H^2. \quad (3.52)$$

Для космологии $f(T)$ гравитации уравнения ФЛРУ имеют вид

$$12H^2 F_T + F = 2k^2 \rho, \quad (3.53)$$

$$48H^2 \dot{H} F_{TT} - (12H^2 + 4\dot{H}) F_T - F = 2k^2 p. \quad (3.54)$$

Поскольку скаляр кручения $T = -6H^2$, уравнения движения перепишем в виде

$$-2TF_T + F = 2k^2 \rho, \quad (3.55)$$

$$-8\dot{H}TF_{TT} + (2T - 4\dot{H})F_T - F = 2k^2 p. \quad (3.56)$$

Тензор энергии импульса для метрики ФЛРУ определяется

$$T_i^k = (\rho + p)u^k u_i + p\delta_i^k, \quad (3.57)$$

здесь u_i четырёхмерная скорость. Учитывая, что при одинаковых верхних и нижних индексах $u_0 \cdot u^0 = 1$, для компонентов тензора энергии импульса получим выражения

$$T_0^0 = -\rho, \quad (3.58)$$

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = p. \quad (3.59)$$

Параметр Хаббла определяется как логарифмическая производная масштабного фактора

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.60)$$

имеем

$$3H^2 = \rho, \quad (3.61)$$

$$3H^2 + 2H = -p. \quad (3.62)$$

Таким образом, закон сохранения энергии запишем в виде

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.63)$$

Уравнения Фридмана в геометрии ФЛРУ запишутся в виде

$$3H^2 = 8\pi G\rho_m - \frac{f}{2} + Tf_T, \quad (3.64)$$

и в виде

$$\dot{H} = -\frac{4\pi G(\rho_m + P_m)}{1 + f_T + 2Tf_{TT}}, \quad (3.65)$$

с применением $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ - параметр Хаббла, а ρ_{dm}, P_{dm} - плотность энергии и давление для холодной темной материи соответственно. Таким образом, можно определить плотность энергии и давление для темной энергии как

$$\rho_{de} \equiv \frac{3}{8\pi G} \left[-\frac{f}{6} + \frac{Tf_T}{3} \right] \quad \text{and} \quad P_{de} \equiv \frac{1}{16\pi G} \left[\frac{f - f_T T + 2T^2 f_{TT}}{1 + f_T + 2Tf_{TT}} \right]. \quad (3.66)$$

Следовательно, уравнение состояния темной энергии может быть записано как

$$w_{de} \equiv \frac{P_{de}}{\rho_{de}} = \frac{f - f_T T + 2T^2 f_{TT}}{(2Tf_T - f)(1 + f_T + 2Tf_{TT})}. \quad (3.67)$$

В рассмотренной выше установке эволюция холодной ТМ будет определяться сохранением тензора энергии-импульса

$$\dot{\rho}_{dm} + 3H\rho_{dm} = 0, \quad (3.68)$$

в то время как плотность темной энергии также будет следовать уравнению сохранения

$$\dot{\rho}_{de} + 3H\rho_{de}(1 + w_{de}) = 0, \quad (3.69)$$

с ρ_{de} и P_{de} , определенными уравнением (3.66). Поскольку $T = -6H^2$, нормализованный параметр Хаббла $E(z)$ может быть записан как

$$E^2(z) \equiv \frac{H^2(z)}{H_0^2} = \frac{T(z)}{T_0}, \quad (3.70)$$

где H_0 является текущим значением параметра Хаббла, а $T_0 = -6H_0^2$.

Перепишем для удобства анализа уравнение Фридмана в виде

$$E^2(z, r) = \Omega_{dm}^{(0)}(1+z)^3 + \Omega_{de}^{(0)}y(z, r), \quad (3.71)$$

с $y(z, r)$ являющимся

$$y(z, r) \equiv \frac{1}{6H_0^2\Omega_{de}^{(0)}} [2Tf_T - f], \quad (3.72)$$

и $\Omega_{de}^{(0)}$ являющийся сегодня параметром плотности темной энергии

$$\Omega_{de}^{(0)} = 1 - \Omega_{dm}^{(0)}, \quad (3.73)$$

произведенный модифицирующим термином $f(T)$. Можно отметить, что эффект от модифицированной динамики телепараллельной гравитации представлен функцией $y(z, r)$, в которой r соответствует свободным параметрам рассматриваемой конкретной модели. Основными характеристиками этой функции являются то, что GR должна воспроизводиться для некоторого предела параметра, в то время как на космологическом уровне также может быть достигнута модель согласования Λ CDM ($y=1$).

3.1.2 $f(T)$ модели

В настоящее время в научной литературе существует огромное количество работ, указывающих на то, как можно решить проблему напряженности постоянной Хаббла H_0 . Однако, нет работы, связывающей решение проблемы напряженности постоянной Хаббла H_0 с неоднородными моделями Вселенной с применением БМО. БМО могут быть полезны при решении проблемы напряженности постоянной Хаббла H_0 . Используя БМО и инструменты вероятностного программирования, можно построить новые модели Вселенной, если проблема натяжения H_0 исчезнет. Рассмотрим три реалистичные модели, способные объяснить как ускоренное расширение Вселенной позднего времени, так и переход к этой фазе. Исследование основано на БМО, которое на самом деле не требует использования реальных данных наблюдений для анализа. В методе используется генеративный процесс, основанный на модели, позволяющий ограничить свободные параметры модели. Наблюдаемая величина, используемая в процессе БМО, принимается за параметр Хаббла, и, используя преимущества метода, можно ограничить модели для диапазонов

красного смещения.

Хорошо известно, что математические модели очень полезны для понимания природы и что удобная настройка их свободных параметров очень важна и должна выполняться очень эффективным способом. В частности, это следует делать также в тех случаях, когда есть всего несколько точек данных наблюдений или качество наблюдений низкое, что приводит к огромным ошибкам. Другими словами, имеющуюся под рукой математическую модель, прежде всего, следует привести в соответствие с наблюдениями путем корректировки свободных параметров, и это должно быть сделано эффективно [211]. В то же время часто это необходимо делать на практике для наборов данных наблюдений, не слишком полагаясь на качество данных. Несколько лет назад это было действительно очень сложной задачей для информатики и, следовательно, накладывало серьезные ограничения на различные области, такие как, в частности, космология и астрофизика. В настоящее время благодаря значительным достижениям в различных научных областях упомянутые трудности были в некоторой степени устранены. Корректировка параметров, не зависящих от модели, является важным шагом в любом исследовании. С другой стороны, всесторонний анализ модели включает также оценку ошибок тех же параметров, по-прежнему обеспечивая согласованное поведение данных наблюдений, показанное определенной математической моделью. Более того, если есть хорошо изученная модель, она может быть полезной и чрезвычайно информативной для разработки экспериментов и наблюдений следующего поколения. Растущее число исследований в этом направлении, по-видимому, указывает на то, что алгоритмы МО действительно могут быть эффективно использованы для подгонки модели и преодоления проблем с данными наблюдений, подобных тем, которые упоминались выше. Прежде чем описать основные идеи, лежащие в основе подхода, используемого для изучения космологических моделей, кратко представим типичные процедуры МО, используемые для изучения космологии и астрофизики.

Прежде всего, необходимо определить модель. Обычно на этом шаге получают и определяют набор уравнений либо правил, управляющих поведением модели. Другими словами, уравнения связывают параметры модели воедино, согласно некоторому правилу, позволяющему изучать поведение модели при различных режимах.

Обычно после этого нужно выбрать набор данных, чтобы найти свободные параметры. В физике почти во всех случаях данные были получены либо из какого-то эксперимента, либо из наблюдения, т. е. необходимо использовать данные, относящиеся к некоторым реальным физическим процессам. На самом деле, еще одна интересная ситуация, о которой следует упомянуть, – это случай, когда данные могут быть смоделированы; но на данный момент невозможно проверить смоделированные данные, поскольку соответствующая установка для эксперимента или наблюдения не работает или все еще находится в стадии разработки.

Наконец, когда первые два шага выполнены, то есть, выбраны модели и

набор данных, запускается алгоритм обучения. Другими словами, используются данные для определения значений неизвестных параметров модели. Запустить алгоритм обучения – это самый интересный шаг, который следует уточнить. Потому что представляем данные в терминах входных и выходных параметров, а затем запускаем некоторые алгоритмы оптимизации, чтобы получить окончательный набор весов; т. е. обучаем сеть, позволяющую определять свободные параметры.

Теперь, определив основные этапы исследований машинного обучения, интенсивно используемых в литературе, посмотрим, что стоит за подходом МО. Подход известен просто как БМО и был реализован с использованием PyMC3 возможности программирования фреймворка на основе python, который на практике оказался очень быстрым, полезным и способным легко интегрироваться с другими фреймворками на основе python.

Таким образом, рассмотрим конкретные модели $f(T)$ гравитации, появившиеся в литературе, с двумя параметрами, из которых один является независимым. Из имеющихся в литературе рассмотрим три модели $f(T)$ гравитации, которые будут исследованы. Три выбранные функции уже были изучены в литературе и являются одними из предпочтительных по имеющимся данным по сравнению с моделью Λ CDM. Изучим ниже три выбранные модели.

Первая модель $f(T)$ (далее f_1 CDM) представляет собой степенную модель Бенгочей и Ферраро [212], которая выглядит следующим образом

$$f_1 = \alpha(-T)^b, \quad (3.74)$$

где α и b два свободных параметра, которые могут быть связаны через

$$\alpha = (6H_0^2)^{1-b} \frac{1 - \Omega_{dm}^{(0)}}{2b - 1}. \quad (3.75)$$

Принимая $z = 0$, $H(z = 0) = H_0$ в уравнений (3.72), коэффициент искажения становится

$$y(z, b) = E^{2b}(z, b), \quad (3.76)$$

и уравнение Фридмана запишем в виде

$$E^2(z, b) = \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{de}^{(0)}E^{2b}(z, b). \quad (3.77)$$

Отсюда видно, что $b = 0$ воспроизводит космологию Λ CDM. Эта модель дает предел де-Ситтера для $z = -1$, а отклонения от стандартной модели более очевидны для более высоких $|b|$. Однако эти отклонения, как правило, невелики, что подтверждается с помощью численных методов.

Вторая модель $f(T)$ (далее f_2 CDM) известна как экспоненциальная модель

Линдера и выглядит в виде

$$f = \alpha T_0 \left(1 - e^{-pT/T_0} \right), \quad (3.78)$$

где α и p также являются параметрами модели, которые могут быть связаны как

$$\alpha = \frac{\Omega_{de}^{(0)}}{1 - (1 + 2p)e^{-p}}, \quad (3.79)$$

с термином искажения, являющимся

$$y(z, b) = \frac{1 - \left(1 + \frac{2E^2}{b} \right) e^{-\frac{E^2}{b}}}{1 - \left(1 + \frac{2}{b} \right) e^{-\frac{1}{b}}}. \quad (3.80)$$

Следовательно, уравнение Фридмана для этой модели становится

$$E^2(z, b) = \Omega_{dm}^{(0)}(1+z)^3 + \Omega_{de}^{(0)} \frac{1 - \left(1 + \frac{2E^2}{b} \right) e^{-\frac{E^2}{b}}}{1 - \left(1 + \frac{2}{b} \right) e^{-\frac{1}{b}}}. \quad (3.81)$$

Видно, что в этой модели можно определить $b \equiv 1/p$, поэтому модель Λ CDM восстанавливается для $b \rightarrow 0^+$, в то время как предел GR достигается для $b \rightarrow +\infty$.

Руководствуясь экспоненциальной гравитацией $f(R)$, Бамба и другие представили модель f_3CDM . Третья рассматриваемая модель $f(T)$ (далее f_3CDM), также имеет экспоненциальную форму, но имеет другой показатель, а именно

$$f_3(T) = \alpha T_0 \left(1 - e^{-p\sqrt{T/T_0}} \right), \quad (3.82)$$

где α и p параметры связаны следующим образом

$$\alpha = \frac{\Omega_{de}^{(0)}}{1 - (1 + p)e^{-p}}, \quad (3.83)$$

и коэффициент искажения становится

$$y(z, b) = \frac{1 - \left(1 + \frac{E}{b}\right) e^{-\frac{E}{b}}}{1 - \left(1 + \frac{1}{b}\right) e^{-\frac{1}{b}}}, \quad (3.84)$$

где $p = 1/b$. Уравнения Фридмана становятся

$$E^2(z, b) = \Omega_{dm}^{(0)}(1+z)^3 + \Omega_{de}^{(0)} \frac{1 - \left(1 + \frac{E}{b}\right) e^{-\frac{E}{b}}}{1 - \left(1 + \frac{1}{b}\right) e^{-\frac{1}{b}}}. \quad (3.85)$$

Аналогично как в модели f_2CDM , можно видеть, что предел $b \rightarrow 0^+$ воспроизводит модель ΛCDM , в то время как $b \rightarrow +\infty$ соответствует чистому пределу GR.

3.2 Байесовское машинное обучение

Рассмотрим строительные блоки БМО и обсудим, как его можно использовать для изучения пространства параметров фоновой динамики трех моделей $f(T)$, представленных в предыдущем разделе. Сначала нужно определить модель, которая будет использоваться для обеспечения так называемого генеративного процесса. Это необходимо для генерации данных, и это означает, что, определяя модель, определим последовательность шагов, описывающих, как были созданы данные. Генеративный процесс включает в себя неизвестные параметры модели и использует явные значения этих параметров. Следовательно, решающим аспектом здесь является включение наших предыдущих убеждений в неизвестные параметры. Нужна только предварительная информация, чтобы получить апостериорную и ограничить параметры космологических моделей.

После запуска алгоритма обучения обновляется представление о параметрах, после чего получаем совершенно новое распределение по этим параметрам.

Следует отметить, что методы вывода без правдоподобия позволяют выполнять Байесовский вывод, используя только прямое моделирование, без ссылки на функцию правдоподобия. Это особенно привлекательно для задач анализа космологических данных, где часто можно моделировать сложные физические процессы и инструментальные эффекты; но включить их в функцию правдоподобия и решить проблему обратного вывода намного сложнее. Методы без правдоподобия, как правило, требуют сжатия больших наборов данных до небольшого количества сводных статистических данных, чтобы быть масштабируемыми. С другой стороны, приближенные Байесовские вычисления без правдоподобия извлекают параметры из предыдущих и пересылают имитационные данные, принимая точки всякий раз, когда моделируемые данные попадают в некоторый небольшой шар вокруг наблюдаемых данных. Вместе

массивное сжатие данных и вывод без правдоподобия оценки плотности обеспечивают основу для выполнения масштабируемого вывода без правдоподобия из больших космологических наборов данных, даже когда прямое моделирование требует больших вычислительных затрат. Это открывает дверь к новой парадигме для принципиального, основанного на моделировании Байесовского вывода в космологии и астрофизике, среди других соответствующих областей исследований.

PyMC3 – это один из фреймворков на базе python, предоставляющий полный набор предопределенных статистических распределений, которые могут быть использованы в качестве строительных блоков модели. Он использует Theano, то есть библиотеку глубокого обучения на основе python, для построения распределений вероятностей и последующего доступа к градиенту, чтобы реализовать передовые алгоритмы вывода. PyMC3 позволяет записывать модели, используя интуитивно понятный синтаксис для описания процесса генерации данных. Это позволяет подгонять модель с использованием основанных на градиенте алгоритмов Монте-Карло с цепями Маркова (MCMC) для быстрого приближенного вывода. Либо можно использовать гауссовские процессы для построения Байесовских непараметрических моделей. Действительно, PyMC3 предоставляет все необходимые инструменты для анализа, позволяя сконцентрировать внимание только на реальной проблеме.

Ограничение космологического сценария данными наблюдений является основным инструментом оценки того, применима модель или нет. Это также шаг за шагом сокращает феноменологию, выявляя приемлемый сценарий. Байесовское моделирование и вывод параметров с помощью стандартных методов MCMC играют центральную роль в этой цепочке. Запишем теорему Байеса

$$P(\theta|D) = \frac{P(D|\theta)P(\theta)}{P(D)}, \quad (3.86)$$

где $P(\theta)$ является предварительным предположением о параметре θ , описывающем рассматриваемую модель.

$P(D|\theta)$ – это вероятность, которая представляет вероятность наблюдения данных D с заданным параметром θ или моделью. Наконец, $P(D)$ – это предельная вероятность или доказательство модели. Теорема Байеса позволяет найти вероятность данной модели с параметрами θ , объясняющими данные D . Эта вероятность обозначается как $P(\theta|D)$ и фактически является условной вероятностью. Следует отметить, что предельное правдоподобие $P(D)$ является полезной величиной для выбора модели, поскольку оно показывает, что модель будет генерировать данные независимо от значений ее параметров. Однако вычисление упомянутых вероятностей невозможно, и это привело к разработке и использованию альтернативных методов для преодоления трудноразрешимых вычислительных аспектов. Одним из альтернативных методов выполнения Байесовского вывода является вариационный вывод, обсуждаемый ниже. Он

значительно быстрее, чем методы МСМС, и не страдает от проблем конвергенции, что делает его очень привлекательным для космологических и астрофизических приложений. Вариационный вывод это полезный инструмент, поскольку он предлагает решение задачи оптимизации путем аппроксимации целевой плотности вероятности. В качестве меры такой близости используется расхождение Кульбака — Лейблера (РКЛ) [213]. Целевой плотностью вероятности будет Байесовская апостериорная, которая позволяет ограничивать параметры модели. Для этой цели первым шагом является нахождение или предложение семейства плотностей Q , а затем нахождение члена этого семейства $q(\theta) \in Q$, который является наиболее близким к целевой плотности вероятности. Этот элемент известен как вариационный задний, который минимизирует расхождение РКЛ до точного заднего, то есть

$$q^*(\theta) = \operatorname{argmin}_{q(\theta) \in Q} \text{KL}(q(\theta) | p(\theta | D)), \quad (3.87)$$

где θ является скрытой переменной для измерения такой близости, а расхождение РКЛ определяется как

$$\text{KL}(q(\theta)Pp(\theta | D)) = E_{q(\theta)}[\log q(\theta)] - E_{q(\theta)}[\log p(\theta | D)]. \quad (3.88)$$

Используя теорему Байеса, можно переписать приведенную выше дивергенцию РКЛ как

$$\text{KL}(q(\theta)Pp(\theta | D)) = \log p(D) + E_{q(\theta)}[\log q(\theta)] - E_{q(\theta)}[\log p(D, \theta)]. \quad (3.89)$$

Из приведенного выше уравнения можно заметить, что для того, чтобы минимизировать вышеуказанный член расхождения РКЛ, необходимо минимизировать второй и третий члены в уравнении (3.89). Теперь, расширяя совместную вероятность $p(D, \theta)$ в уравнении (3.89) вариационная нижняя граница может быть переписана

$$ELBO(q(\theta)) = E_{q(\theta)}[\log p(D | \theta)] - \text{KL}(q(\theta)Pp(\theta)). \quad (3.90)$$

Первый член в приведенном выше уравнении является своего рода термином соответствия данных, максимизирующим вероятность данных наблюдений. Напротив, второй член — это РКЛ расхождение между вариационным распределением и предыдущим. Его можно интерпретировать как термин регуляризации, который гарантирует, что вариационное распределение не станет слишком сложным, что потенциально может привести к чрезмерной подгонке. При этом есть подходящий инструмент для управления процессом и эффективного предотвращения проблем с вычислениями путем увеличения или уменьшения вклада первых двух членов в уравнении (3.88).

Для нахождения приближения целевой плотности вероятности нужно изучить его непосредственно из космологической модели, используя нейронные сети (НС). В этом случае оба члена в уравнении (3.90) можно интерпретировать с новой точки зрения, сводя к первоначальному личному убеждению и сгенерированному модельному убеждению соответственно. Это удобный подход, который позволяет преодолеть различные проблемы, связанные с данными, поскольку в этом случае даже данные низкого качества могут быть использованы в конце для проверки полученных результатов. Эта идея и ее успех представляют собой годы развития, позволяющие перевести всю тему на другой уровень. Необходимо упомянуть, что в качестве метода обучения использованы глубокое вероятностное обучение, тип глубокого обучения, учитывающий неопределенности в модели, первоначальное убеждение, обновление убеждения и глубокие НС. Этот подход обеспечивает достаточную основу для получения надежных оценок для многих задач МО.

3.3 Реализация Байесовского машинного обучения

Используется пакет вероятностного программирования *PyMC3*, который использует библиотеку глубокого обучения Theano, то есть библиотеку на основе python с глубоким обучением [214], предоставляющую передовые алгоритмы вывода для определения физической модели, выполнения вариационного вывода и построения апостериорного распределения. Обнаружено, что публичная библиотека *PyMC3* обогащена несколькими отличными примерами, демонстрирующими, как можно наладить процесс обучения и изучить распределения вероятностей; поэтому исключено какое-либо конкретное обсуждение математической основы, лежащей в основе алгоритмов МО и БМО.

Приведенное выше обсуждение, позволяющее интегрировать БМО и вариационный вывод, необходимо чтобы изучить ограничения на созданную космологическую модель. В этом анализе с использованием *PyMC3* выполнены следующие действия:

Определена космологическая модель и наблюдаемое, которое будет сгенерировано, и, следовательно, установлены элементы так называемого порождающего процесса. Процесс основан на уравнениях (3.2) и (3.3).

Рассмотрены данные, полученные в результате процесса генерации, как данные в следующем смысле. Очень важно понять смысл этого шага. В частности, сгенерировав так называемые данные, генерируем распределения вероятностей, показывающие, как данная космологическая модель может объяснить данные. Таким образом, значительно уменьшаем сложность задачи, поскольку семейство вероятностей, аппроксимирующих конечную апостериорную, будет напрямую зависеть только от априорных значений. Чтобы заметить зависимость, нужно рассмотреть значение правой части теоремы Байеса.

Запущен алгоритм обучения, чтобы получить новое распределение по параметрам модели и обновить предыдущие убеждения, наложенные на

параметры космологической модели.

Генерация процесса обучения и направление обучения всегда контролируются РКЛ. Поскольку задействовано вероятностное программирование, после достаточного количества сгенерированных вероятностных распределений планируется изучить асимптотически правильную форму для апостериорного распределения, позволяющую вывести ограничения.

Рассмотрены несколько различных сценариев, в которых были сгенерированы данные, которые следует понимать в контексте приведенного выше обсуждения, чтобы охватить различные диапазоны красного смещения как для объектива, так и для источников, а также разное количество объективов и источников. Распределение для объектива z_l и источника z_s , рассмотренных в этой статье, можно найти в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Распределение красного смещения

Распределение для объектива		Распределение для источника	
0,1	1,2	0,3	1,7
0,1	1,5	0,3	1,7
0,1	2,0	0,3	2,5
0,1	2,4	0,3	2,5

Распределение красного смещения зависит от объектива и источника систем с линзами ГВ и ЭМВ. Первоначальное убеждение, используемое в качестве входных данных для начала обучения, – это Λ CDM.

Рассмотренные объективы и источники распределены как по низким, так и по высоким красным смещениям. Это связано с тем, что данные наблюдений за космической историей Вселенной доступны в низких диапазонах красного смещения и могут быть использованы для проверки полученных результатов, полученных с помощью БМО. С другой стороны, рассматриваются высокие диапазоны красного смещения по причинам прогнозирования; однако полной проверки результатов придется подождать до ближайшего будущего, когда действительно станут доступны данные наблюдений с более высоким красным смещением. Действительно, проверка полученных результатов основана на данных о скорости расширения, представленных в таблице (1). Более того, должны подчеркнуть, что первоначальное убеждение, используемое в качестве входных данных, – это модель Λ CDM. Ниже представлены изученные ограничения на космологические параметры $f(T)$ космологии. Для удобства результаты приведены в трех подразделах.

3.3.1 f_1CDM модель

Первый случай соответствует модели f_1CDM , заданной уравнениями (3.74) и (3.75), когда процесс генерации для БМО был организован с использованием выражений (3.2) и (3.3). Более того, для всех случаев, обсуждаемых ниже, были введены плоские априорные значения, такие как $H_0 \in [64,78]$, $\Omega_{dm}^{(0)} \in [0.2,0.4]$ и $b \in [-0.1,0.1]$ соответственно. Необходимо упомянуть, что N линзы (и соответствующие источники) для заданного диапазона красного смещения распределены равномерно в соответствии с интервалами, указанными в таблице 3.2.

В результате анализа получено, что:

Наиболее подходящие значения и ошибки 1σ параметров модели, когда $z_l \in [0.1,1.2]$ и $z_s \in [0.3,1.7]$ для $N_{lens} = 50$ имеем $\Omega_{dm}^{(0)} = 0.28 \pm 0.012$, $H_0 = 69.61 \pm 0.141 \frac{км}{сМпк}$ и $b = 0.00197 \pm 0.005$.

С другой стороны, когда $z_l \in [0.1,1.2]$ и $z_s \in [0.3,1.7]$ с $N_{lens} = 100$ установлено, что наиболее подходящие значения параметров модели составляют $\Omega_{dm}^{(0)} = 0.29 \pm 0.012$, $H_0 = 68.81 \pm 0.145 \frac{км}{сМпк}$ и $b = 0.003 \pm 0.005$.

Более того, для двух других случаев, когда $z_l \in [0.1,1.5]$ и $z_s \in [0.3,1.7]$, и $z_l \in [0.1,2.0]$ и $z_s \in [0.3,2.5]$ (в обоих случаях $N_{lens} = 100$), обнаружено, что $\Omega_{dm}^{(0)} = 0.297 \pm 0.011$, $H_0 = 68.84 \pm 0.146 \frac{км}{сМпк}$, $b = 0.0043 \pm 0.0051$, и $\Omega_{dm}^{(0)} = 0.328 \pm 0.012$, $H_0 = 69.06 \pm 0.175 \frac{км}{сМпк}$, $b = 0.0071 \pm 0.0051$, соответственно.

Наконец, найдены $\Omega_{dm}^{(0)} = 0.302 \pm 0.0105$, $H_0 = 65.56 \pm 0.134 \frac{км}{сМпк}$ и $b = 0.00013 \pm 0.0005$, когда $z_l \in [0.1,2.4]$ и $z_s \in [0.3,2.5]$ для $N_{lens} = 100$.

Значения наилучшего соответствия и ошибки 1σ , оцененные для модели f_1CDM , заданные уравнениями (3.74) и (3.77), когда процесс генерации на основе модели выполняется на уравнениях (3.2) и (3.3), приведены в таблице 3.3. Плоские априорные значения, такие как $H_0 \in [64,78]$, $\Omega_{dm}^{(0)} \in [0.2,0.4]$ и $b \in [-0.1,0.1]$, были введены и использованы в генеративном процессе соответственно.

Краткое изложение полученных результатов показаны в таблице 3.3, а на рисунке 3.1 представлена контурная карта 1σ и 2σ для f_1CDM модели. Из рисунка 3.1 видно, что БМО накладывает очень жесткие ограничения на параметры. Отметим, что параметр b , который определяет отклонение от модели ΛCDM , во всех случаях близок к нулю, что указывает на то, что согласно SLTD измерениям f_1CDM модель, скорее всего, не отклоняется от модели ΛCDM . Это неудивительно, поскольку аналогичные выводы уже были сделаны в литературе.

Таблица 3.3 – Значения наилучшего соответствия и ошибки 1σ , оцененные для модели f_1CDM

$f_1CDM : f(T) = \alpha(-T)^b$	N_{lens}	$\Omega_{dm}^{(0)}$	H_0	b
когда $z_l \in [0.1, 1.2]$ и $z_s \in [0.3, 1.7]$	50	0.28 ± 0.012	69.61 ± 0.14	0.00197 ± 0.005
когда $z_l \in [0.1, 1.2]$ и $z_s \in [0.3, 1.7]$	100	0.29 ± 0.012	68.81 ± 0.14	0.003 ± 0.005
когда $z_l \in [0.1, 1.5]$ и $z_s \in [0.3, 1.7]$	100	0.297 ± 0.011	68.84 ± 0.14	0.0043 ± 0.0051
когда $z_l \in [0.1, 2.0]$ и $z_s \in [0.3, 2.5]$	100	0.328 ± 0.012	69.06 ± 0.17	0.0071 ± 0.0051
когда $z_l \in [0.1, 2.4]$ и $z_s \in [0.3, 2.5]$	100	0.302 ± 0.0105	65.56 ± 0.13	0.00013 ± 0.0005

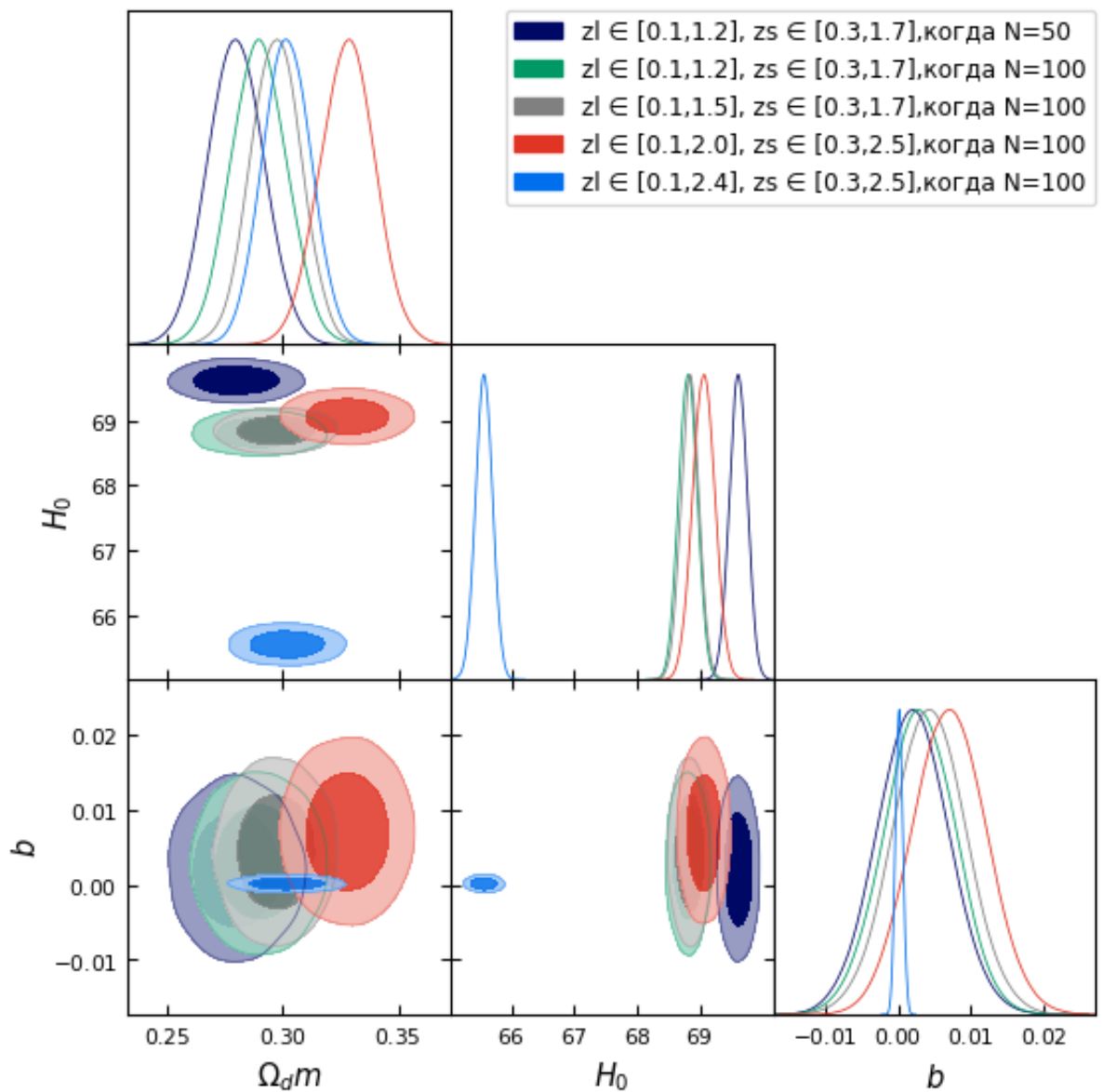


Рисунок 3.1—Графики 1σ и 2σ контуров доверительного уровня для космологических параметров и параметра b для f_1CDM модели

Графики 1σ и 2σ контуров доверительного уровня для космологических параметров и параметра b для f_1CDM модели были построены с использованием данных моделирования SLTD, полученных в результате процесса генерации на основе уравнений (3.2) и (3.3). Каждый цвет контура обозначает линзы и источники, распределенные в определенном диапазоне красного смещения с номером объектива $N_{lens} = 50$ (темно-синий контур) и $N_{lens} = 100$ (зеленый, серый, красный и синий контуры), соответственно. Плоские априорные значения, такие как $H_0 \in [64, 78]$, $\Omega_{dm}^{(0)} \in [0.2, 0.4]$ и $b \in [-0.1, 0.1]$, были наложены и использованы в генеративном процессе. Первоначальное убеждение, используемое в качестве входных данных, – это ΛCDM модель.

Однако необходимо подчеркнуть, что это первый признак того, что разработанный конвейер надежен и позволяет изучать ранее известные результаты из совершенно другой установки, которую невозможно воспроизвести с помощью классических методов, используемых в космологии. Как и в любом другом алгоритме МО, также необходимо проверить полученные результаты БМО, и для этой цели использованы доступный ОНД, как уже обсуждалось. Следовательно, разумно следовать этому конкретному способу проверки полученных результатов для решения проблемы напряженности H_0 в этой конкретной f_1CDM модели.

На рисунке 3.2 приведены графические результаты процесса проверки, где сравнивается эволюция красного смещения и параметр Хаббла, предсказанная БМО с применением ОНД от космических хронометров и БАК.

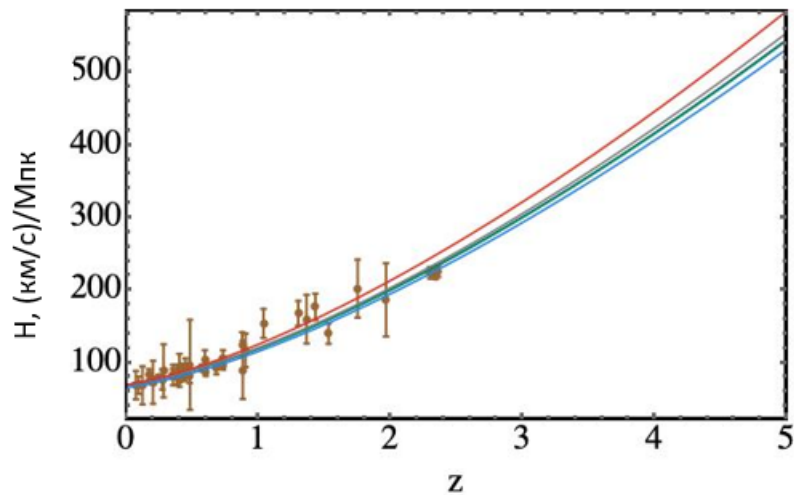


Рисунок 3.2 – Прогнозы БМО для эволюции красного смещения и параметра Хаббла в случае f_1CDM модели

На рисунке 3.3 приведены прогнозы БМО для эволюции красного смещения и изобилия темной материи $\Omega_{dm}^{(0)}$.

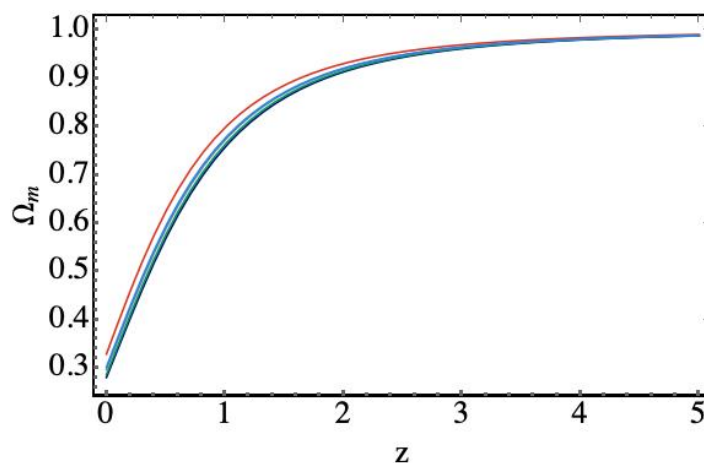


Рисунок 3.3 – Прогнозы БМО для эволюции красного смещения и изобилия темной материи $\Omega_{dm}^{(0)}$ в случае f_1CDM модели

Далее на рисунке 3.4 приведены графические результаты процесса проверки, где сравнивается эволюция красного смещения и параметр замедления q , предсказанная БМО с применением ОНД от космических хронометров и БАК.

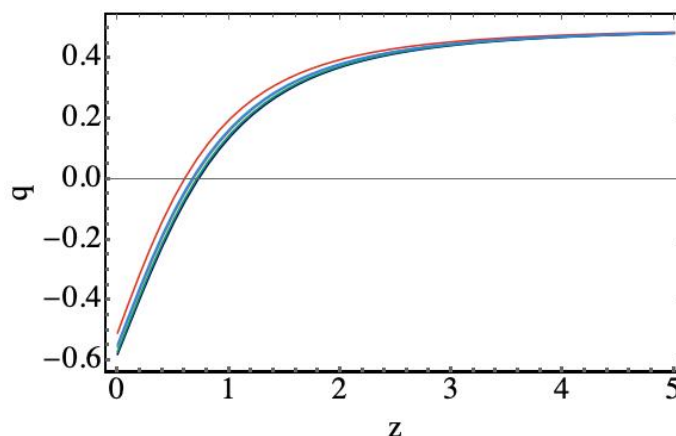


Рисунок 3.4 – Прогнозы БМО для эволюции красного смещения и параметра замедления q в случае f_1CDM модели

На рисунке 3.5 приведены прогнозы БМО для эволюции красного смещения и параметра уравнения состояния ω_{de} для наилучшего соответствия фоновой динамики.

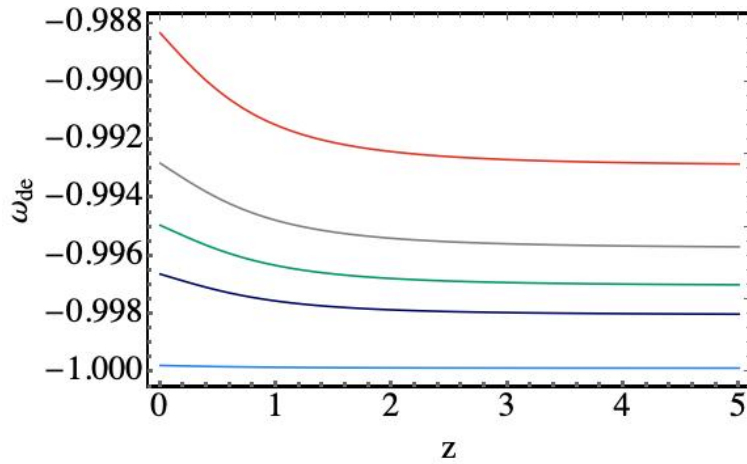


Рисунок 3.5 – Прогнозы БМО для эволюции красного смещения и параметра уравнения состояния $\omega_{de} = \frac{p_{de}}{\rho_{de}}$ в случае f_1CDM модели

Для рисунков 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 придерживаемся того же соглашения для темно-синих, зеленых, серых, красных и синих кривых, что и условные обозначения на рисунке 3.1. Каждая цветовая линия обозначает линзы и источники, распределенные в определенном диапазоне красного смещения с номером объектива $N_{lens} = 50$ (темно-синяя кривая) и $N_{lens} = 100$ (зеленая, серая, красная и синяя кривые), соответственно. Плоские априорные значения, такие как $H_0 \in [64, 78]$, $\Omega_{dm}^{(0)} \in [0.2, 0.4]$ и $b \in [-0.1, 0.1]$, были наложены и использованы в генеративном процессе. Первоначальное убеждение, используемое в качестве входных данных, – это ΛCDM модель. Точки соответствуют точкам данных 40, представляющим доступные ОНД, которые были приведены в таблице (3.1).

Видно, что, согласно среднему значению изученных результатов, эволюция красного смещения функции Хаббла идеально соответствует ОНД при низких красных смещениях, но при высоких красных смещениях возникает некоторая напряженность. Это интересное предупреждение о методе обучения, которое следует держать под контролем при будущем анализе этой модели с данными о сильном линзировании по временной задержке. Кроме того, из рисунка 3.4 во всех изученных случаях виден хороший фазовый переход между замедляющейся и ускоряющейся фазой. С другой стороны, рисунок 3.5 показывает, что модель ведет себя подобно космологической постоянной как $\omega_{de} \approx -1$. Однако ожидается, что также будет наблюдаться отклонение от космологической постоянной. Интересно, что этот результат, в свою очередь, ясно указывает на поддержку динамических моделей темной энергии.

В выводах видим, что модель f_1CDM не способна решить проблему H_0 , и новые данные наблюдений со значительно увеличенным числом источников линз в конечном итоге приведут к дискредитации модели. То же самое утверждение с высокой точностью в соответствии с полученными результатами можно утверждать даже тогда, когда системы наблюдаются за пределами доступных в настоящее время диапазонов красного смещения. В конце концов,

найден еще один важный результат, который следует должным образом учитывать в будущем, заключается в том, что следует серьезно рассмотреть напряженность между данными OHD и SLTD при высоких красных смещениях.

3.3.2 f_2CDM модель

Вторая модель, которую следует рассмотреть – это f_2CDM модель, заданная уравнениями (3.78) и (3.81). В этом случае генеративный процесс для БМО также был организован в соответствии с уравнениями (3.2) и (3.3).

Во время изучения этой модели стали известны наиболее подходящие значения параметров модели с их ошибками 1σ .

В частности, обнаружено:

Когда $z_l \in [0.1, 1.2]$ и $z_s \in [0.3, 1.7]$ для $N_{lens} = 50$ наиболее подходящие значения и 1σ ошибки, которые должны быть $\Omega_{dm}^{(0)} = 0.277 \pm 0.01$, $H_0 = 73.59^{+0.174}_{-0.165} \frac{км}{сМпк}$ и $p = 5.88^{+0.29}_{-0.34}$, соответственно.

С другой стороны, когда $z_l \in [0.1, 1.2]$ и $z_s \in [0.3, 1.7]$ с $N_{lens} = 100$ установлено, что наиболее подходящие значения параметров модели составляют $\Omega_{dm}^{(0)} = 0.28 \pm 0.01$, $H_0 = 74.68 \pm 0.148 \frac{км}{сМпк}$ и $p = 6.01 \pm 0.256$.

Более того, для двух других случаев, когда $z_l \in [0.1, 1.5]$ и $z_s \in [0.3, 1.7]$, и $z_l \in [0.1, 2.0]$ и $z_s \in [0.3, 2.5]$ (в обоих случаях $N_{lens} = 100$), обнаружено, что $\Omega_{dm}^{(0)} = 0.279 \pm 0.0097$, $H_0 = 74.90 \pm 0.135 \frac{км}{сМпк}$, $p = 5.26 \pm 0.179$, и $\Omega_{dm}^{(0)} = 0.276 \pm 0.01$, $H_0 = 74.64 \pm 0.145 \frac{км}{сМпк}$, $p = 5.4 \pm 0.135$, соответственно.

Наконец, найдено, что $\Omega_{dm}^{(0)} = 0.275 \pm 0.01$, $H_0 = 74.41^{+0.183}_{-0.178} \frac{км}{сМпк}$ и $p = 5.67^{+0.175}_{-0.17}$.

Это получается для случая, когда $z_l \in [0.1, 2.4]$ и $z_s \in [0.3, 2.5]$ для $N_{lens} = 100$.

Для всех рассмотренных выше случаев были введены плоские априорные значения, такие как $H_0 \in [64, 78]$, $\Omega_{dm}^{(0)} \in [0.2, 0.4]$ и $p \in [-10, 10]$.

Более того, N линз (и источников соответственно) для всех рассмотренных случаев распределены равномерно, как и в случае модели f_1CDM , рассмотренной в предыдущем разделе.

Полученные результаты наилучшего соответствия и ошибки 1σ , оцененные для модели f_2CDM с применением уравнений (3.78) и (3.80) обобщены и показаны в таблице 3.4.

Таблица 3.4– Значения наилучшего соответствия и ошибки 1σ , оцененные для модели f_2CDM

$f_2CDM: f(T) = \alpha T_0 \left(1 - e^{-pT/T_0}\right)$	N_{lens}	$\Omega_{dm}^{(0)}$	H_0	p
когда $z_l \in [0.1, 1.2]$ и $z_s \in [0.3, 1.7]$	50	0.277 ± 0.01	$73.59^{+0.174}_{-0.165}$	$5.88^{+0.29}_{-0.34}$
когда $z_l \in [0.1, 1.2]$ и $z_s \in [0.3, 1.7]$	100	0.28 ± 0.01	74.68 ± 0.148	6.01 ± 0.256
когда $z_l \in [0.1, 1.5]$ и $z_s \in [0.3, 1.7]$	100	0.279 ± 0.0097	74.90 ± 0.135	5.26 ± 0.179
когда $z_l \in [0.1, 2.0]$ и $z_s \in [0.3, 2.5]$	100	0.276 ± 0.01	74.64 ± 0.145	5.4 ± 0.135
когда $z_l \in [0.1, 2.4]$ и $z_s \in [0.3, 2.5]$	100	0.275 ± 0.01	$74.41^{+0.183}_{-0.178}$	$5.67^{+0.175}_{-0.17}$

На рисунке 3.6 показаны изученные контурные графики параметров модели f_2CDM .

Процесс генерации на основе f_2CDM модели, которые приведены в таблице 3.4, выполняется с использованием уравнений (3.2) и (3.3). Плоские априорные значения, такие как $H_0 \in [64, 78]$, $\Omega_{dm}^{(0)} \in [0.2, 0.4]$ и $p \in [-10, 10]$, были введены и использованы в генеративном процессе соответственно.

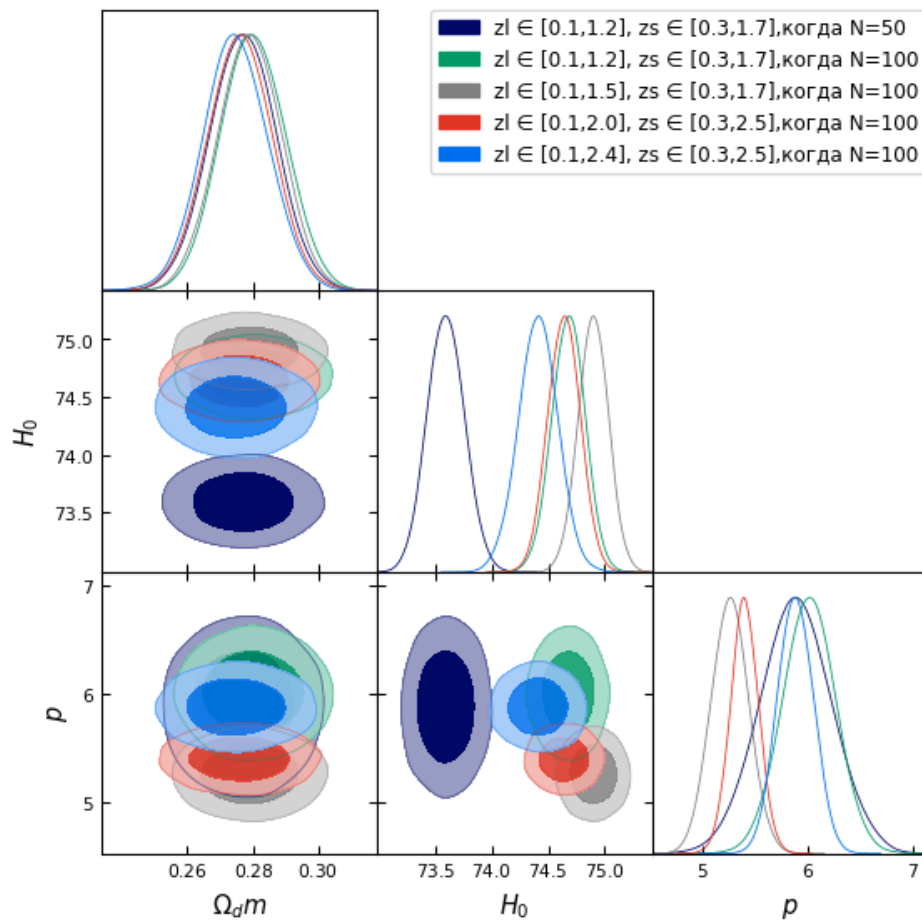


Рисунок 3.6 – Графики 1σ и 2σ контуров доверительного уровня для космологических параметров и параметра p для f_2CDM модели

Контурные графики доверительного уровня 1σ и 2σ для модели f_2CDM построены с использованием наборов данных, смоделированных SLTD, и получены в результате процесса генерации на основе уравнений (3.2) и (3.3). Каждый цвет контура обозначает линзы и источники, распределенные в определенном диапазоне красного смещения, с номером объектива $N_{lens} = 50$ (темно-синий контур) и $N_{lens} = 100$, зеленый, серый, красный и синий контуры соответственно. Плоские априорные значения, такие как $H_0 \in [64, 78]$, $\Omega_{dm}^{(0)} \in [0.2, 0.4]$ и $p \in [-10, 10]$, были наложены и использованы в генеративном процессе. Первоначальное убеждение, используемое в качестве входных данных, - это ΛCDM модель.

На основе изученных контурных графиков параметров f_2CDM модели видно, что БМО снова накладывает жесткие ограничения на космологические параметры для всех рассмотренных случаев. Полученные результаты указывают на то, что рассматриваемая модель больше отклоняется от стандартной космологической модели из-за относительно значительного значения параметра $b = 1/p$ по сравнению с предыдущей моделью. На рисунке 3.7 представлены полученные результаты БМО, где сравнивается изученная эволюция красного смещения и параметра Хаббла с доступным ОНД.

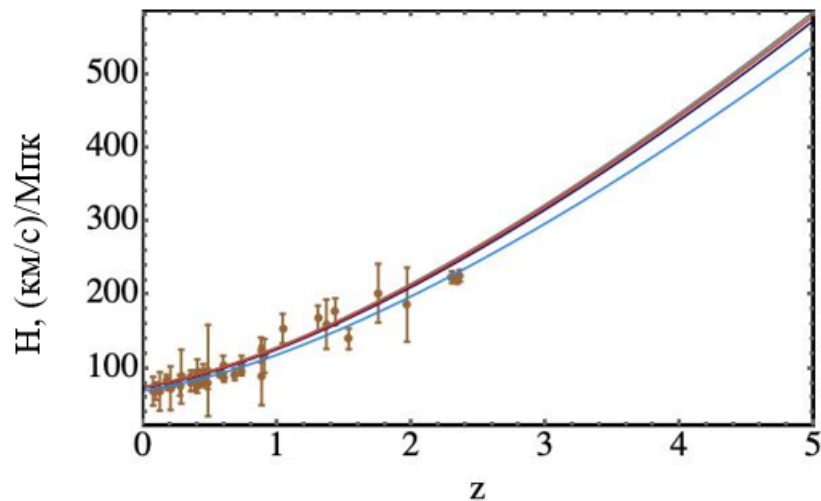


Рисунок 3.7 – Прогнозы БМО для эволюции красного смещения и параметра Хаббла в случае f_2CDM модели

Далее на рисунке 3.8 приведены прогнозы БМО для эволюции красного смещения и избытка темной материи $\Omega_{dm}^{(0)}$ в случае f_2CDM модели.

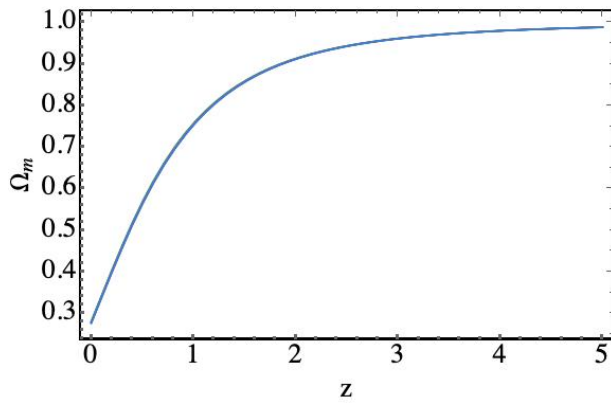


Рисунок 3.8 – Прогнозы БМО для эволюции красного смещения и изобилия темной материи $\Omega_{dm}^{(0)}$ в случае f_2CDM модели

Графические результаты процесса проверки, где сравнивается эволюция красного смещения и параметр замедления q , предсказанная БМО с применением ОНД от космических хронометров и БАК, приведены на рисунке 3.9.

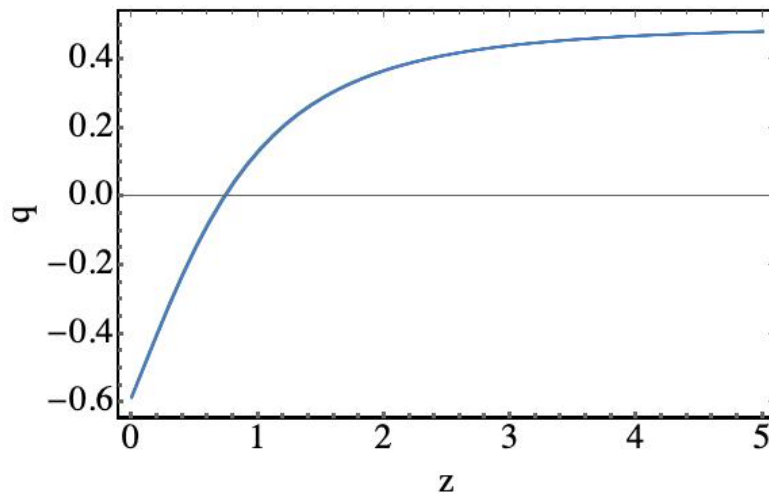


Рисунок 3.9 – Прогнозы БМО для эволюции красного смещения и параметра замедления q в случае f_2CDM модели

Предсказания БМО для эволюции красного смещения и параметра уравнения состояния $\omega_{de} = \frac{p_{de}}{\rho_{de}}$ для наилучшего соответствия значениям параметров модели показаны на рисунке 3.10.

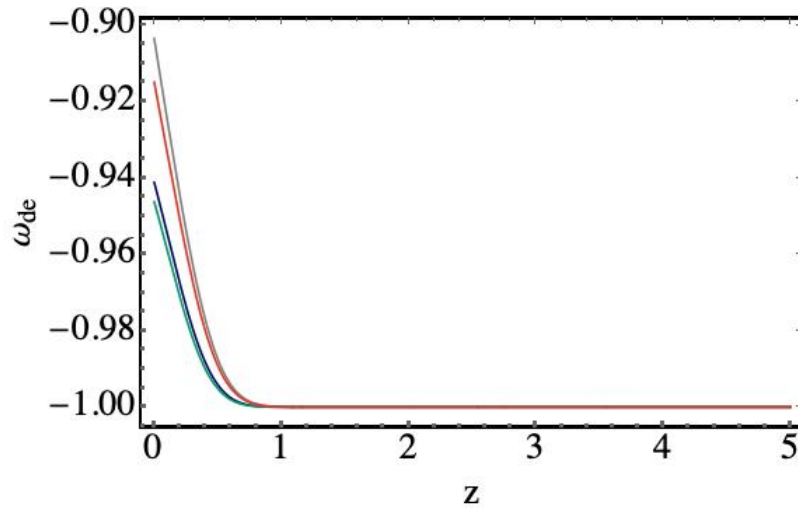


Рисунок 3.10 – Прогнозы БМО для эволюции красного смещения и параметра уравнения состояния $\omega_{de} = \frac{p_{de}}{\rho_{de}}$ в случае f_2CDM модели

Каждая цветовая линия обозначает объективы и источники, распределенные в определенном диапазоне красного смещения с номером объектива $N_{lens} = 50$ (темно-синяя кривая) и $N_{lens} = 100$, зеленая, серая, красная и синяя кривые соответственно. Точки соответствуют снова точкам данных 40, представляющим доступные ОНД, которые были приведены в таблице (3.1). Отметим, что прогноз БМО для эволюции красного смещения функции Хаббла соответствует данным наблюдений при низких красных смещениях, но наблюдается некоторая напряженность при высоких красных смещениях. Из рисунка 3.9 яден фазовый переход между замедляющейся и ускоряющейся фазой Вселенной во всех рассмотренных случаях. Более того, рисунок 3.10 показывает, что модель ведет себя как космологическая постоянная, $\omega_{de} = -1$, при $z \geq 0,75$ и квинтэссенция темной энергии, $\omega_{de} > -1$, при $z < 0,75$. Поведение движения справедливо для всех рассмотренных случаев, что указывает на почти линейно возрастающую функциональную форму для ω_d для $z \in [0, 0.75]$.

Интересно, что модель может ослабить напряженность H_0 , потому что есть значительное отклонение от стандартной модели ΛCDM , приводящее к более высокому значению для H_0 . Хотя модель, рассмотренная в предыдущем разделе, также отличается от стандартной модели ΛCDM , но в соответствии с изученными ограничениями неясно, может ли быть решена проблема напряженности H_0 или нет. Стоит отметить, что в соответствии с этими результатами будущие наблюдения с большим количеством систем линз-источников и охватывающие новые диапазоны красного смещения, скорее всего, не изменят оценки $\Omega_{dm}^{(0)}$. Более того, из рисунка видно, что на изменение параметра замедления q и изменение Ω_m не будут сильно влиять будущие измерения данных SLTD. Однако этот момент может быть подтвержден только

в будущем.

Ещё раз подчеркнем, что, согласно БМО, с помощью которого были сгенерированы данные SLTD, рассматриваемая f_2CDM модель может решить проблему H_0 и описывает квинтэссенцию Вселенной, в которой доминирует темная энергия, где изначально темная энергия является космологической постоянной.

3.3.3 f_3CDM модель

Третья модель, которую следует рассмотреть— это f_3CDM , которая задается уравнениями (3.82) и (3.84). Аналогичным образом, используя уравнения (3.2) и (3.3), выполнен генеративный процесс для БМО.

Применяя те же плоские априорные значения, что и в случае модели f_3CDM , необходимо изучить ограничения на параметры модели.

В частности:

Когда $z_l \in [0.1, 1.2]$ и $z_s \in [0.3, 1.7]$ для $N_{lens} = 50$ наиболее подходящие значения и 1σ ошибки — это $\Omega_{dm}^{(0)} = 0.267 \pm 0.022$, $H_0 = 67.58 \pm 0.161 \frac{км}{сМпк}$, $p = 5.16 \pm 0.1$, соответственно.

С другой стороны, когда $z_l \in [0.1, 1.2]$ и $z_s \in [0.3, 1.7]$ с $N_{lens} = 100$ наиболее подходящие значения и 1σ установлено, что погрешности параметров модели составляют $\Omega_{dm}^{(0)} = 0.275 \pm 0.018$, $H_0 = 73.44 \pm 0.1 \frac{км}{сМпк}$ и $p = 5.15 \pm 0.1$.

Более того, для двух других случаев, когда $z_l \in [0.1, 1.5]$ и $z_s \in [0.3, 1.7]$, и $z_l \in [0.1, 2.0]$ и $z_s \in [0.3, 2.5]$ (в обоих случаях $N_{lens} = 100$), обнаружено, что $\Omega_{dm}^{(0)} = 0.237 \pm 0.0167$, $H_0 = 73.18 \pm 0.16 \frac{км}{сМпк}$ $км/с$, $p = 4.67 \pm 0.142$ и $\Omega_{dm}^{(0)} = 0.259 \pm 0.01$, $H_0 = 69.86 \pm 0.125 \frac{км}{сМпк}$, $p = 4.87 \pm 0.135$, соответственно.

Наконец, для случая, когда $N_{lens} = 100$, найдено $\Omega_{dm}^{(0)} = 0.256 \pm 0.006$, $H_0 = 73.054 \pm 0.102$ $км/с/Мпс$ и $p = 5.61 \pm 0.095$. В этом случае, $z_l \in [0.1, 2.4]$ и $z_s \in [0.3, 2.5]$.

Значения наилучшего соответствия и ошибки 1σ , оцененные для f_3CDM модели, заданные уравнениями (3.82) и (3.84), приведены в таблице 3.5. Процесс генерации на основе f_3CDM модели основан на уравнениях (3.2) и (3.3).

Плоские априорные значения введены в виде $H_0 \in [64, 78]$, $\Omega_{dm}^{(0)} \in [0.2, 0.4]$ и $p \in [-10, 10]$ соответственно. Изученные ограничения на параметры модели обобщены в таблице 3.5.

Таблица 3.5 – Значения наилучшего соответствия и ошибки 1σ , оцененные для модели f_3CDM

$f_2CDM : f(T) = -\alpha T \left(1 - e^{p\sqrt{T_0/T}} \right)$	N_{lens}	$\Omega_{dm}^{(0)}$	H_0	p
когда $z_l \in [0.1, 1.2]$ и $z_s \in [0.3, 1.7]$	50	0.267 ± 0.022	67.58 ± 0.161	5.16 ± 0.1
когда $z_l \in [0.1, 1.2]$ и $z_s \in [0.3, 1.7]$	100	0.275 ± 0.018	73.44 ± 0.1	5.15 ± 0.1
когда $z_l \in [0.1, 1.5]$ и $z_s \in [0.3, 1.7]$	100	0.237 ± 0.0167	73.18 ± 0.16	4.67 ± 0.142
когда $z_l \in [0.1, 2.0]$ и $z_s \in [0.3, 2.5]$	100	0.259 ± 0.01	69.86 ± 0.125	4.87 ± 0.135
когда $z_l \in [0.1, 2.4]$ и $z_s \in [0.3, 2.5]$	100	0.256 ± 0.006	73.054 ± 0.102	5.61 ± 0.095

Проверка результатов БМО для этой f_3CDM модели представлена на рисунке 3.11.

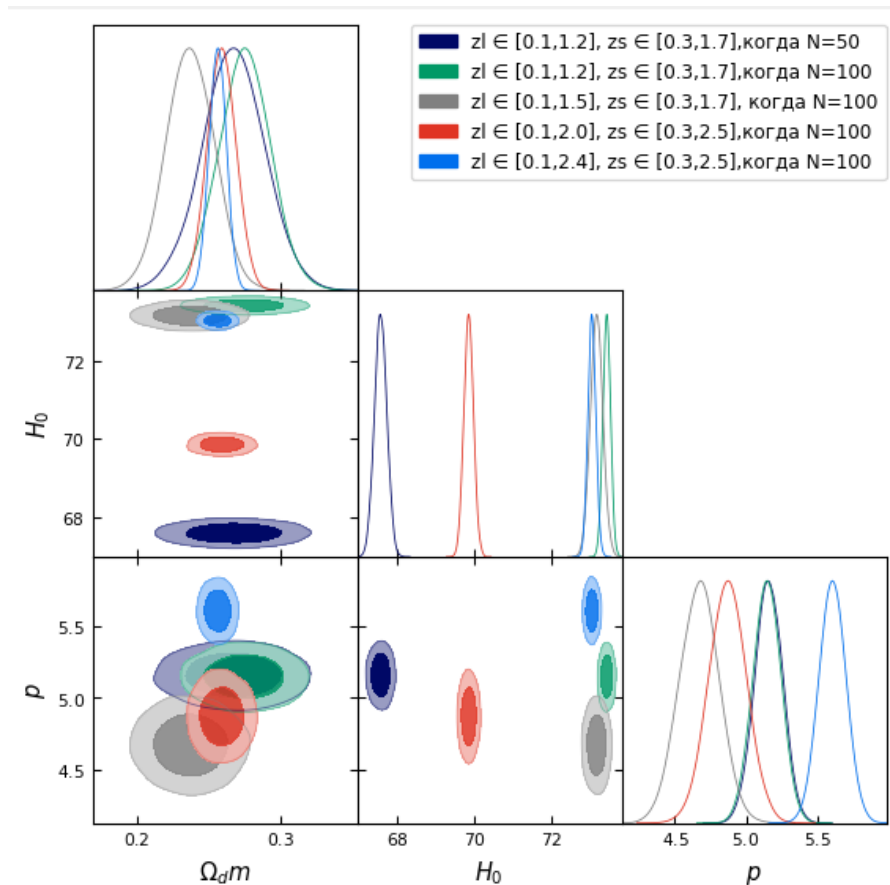


Рисунок 3.11– Графики 1σ и 2σ контуров доверительного уровня для космологических параметров и параметра p для f_3CDM модели

Контурные графики доверительного уровня 1σ и 2σ для модели f_3CDM построены с использованием наборов данных, смоделированных SLTD, и

получены в результате процесса генерации на основе уравнений (3.2) и (3.3). Каждый цвет контура обозначает линзы и источники, распределенные в определенном диапазоне красного смещения, с номером объектива $N_{\text{lens}} = 50$ (темно-синий контур) и $N_{\text{lens}} = 100$, зеленый, серый, красный и синий контуры соответственно.

На рисунке 3.12 представлены полученные результаты БМО для f_3CDM модели, где сравнивается изученная эволюция красного смещения и параметра Хаббла с доступным ОНД. Видно, что прогноз БМО для эволюции красного смещения функции Хаббла H соответствует данным наблюдений при низких красных смещениях, хотя при высоких красных смещениях может наблюдаться некоторая напряженность.

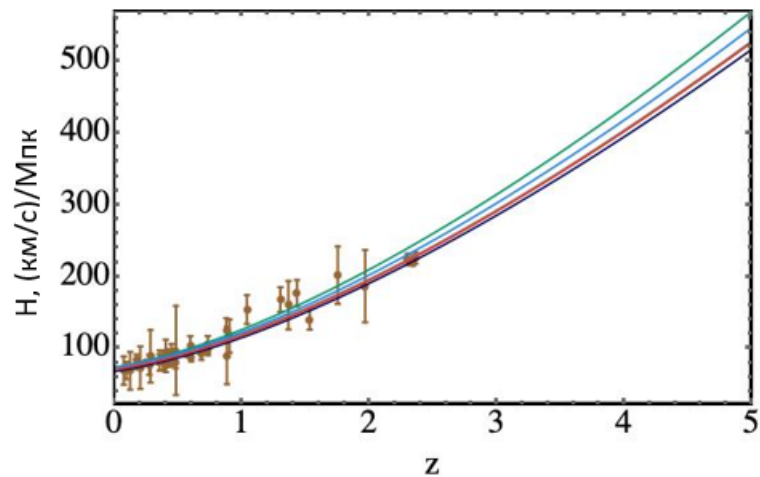


Рисунок 3.12 – Прогнозы БМО для эволюции красного смещения и параметра Хаббла в случае f_3CDM модели

Далее на рисунке 3.13 приведены прогнозы БМО для эволюции красного смещения и изобилия темной материи $\Omega_{dm}^{(0)}$ в случае f_3CDM модели.

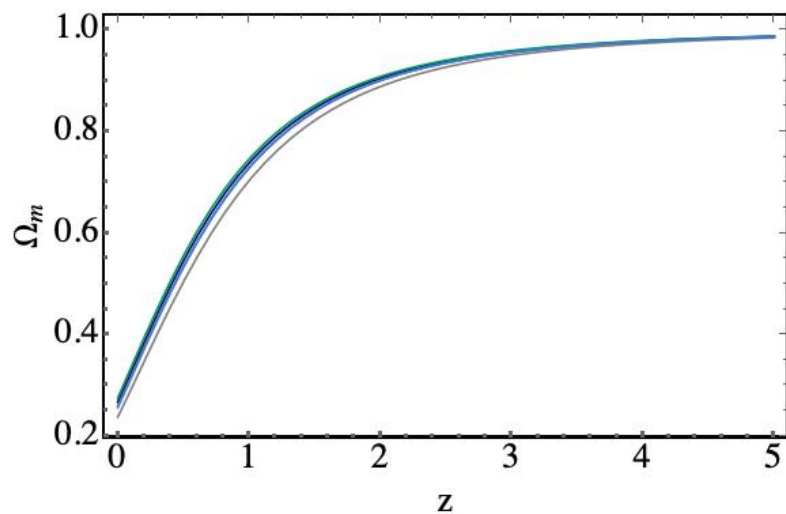


Рисунок 3.13 – Прогнозы БМО для эволюции красного смещения и изобилия темной материи $\Omega_{dm}^{(0)}$ в случае f_3CDM модели

Графические результаты процесса проверки, где сравнивается эволюция красного смещения и параметр замедления q , предсказанная БМО с применением ОНД от космических хронометров и БАК, приведены на рисунке 3.14.

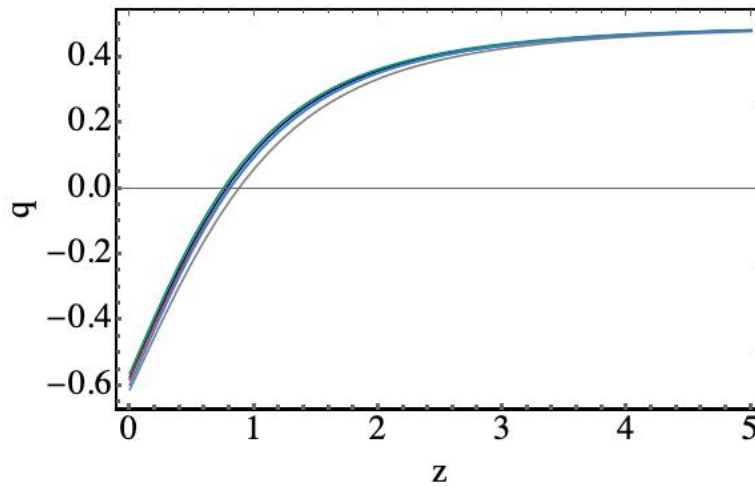


Рисунок 3.14 – Прогнозы БМО для эволюции красного смещения и параметра замедления q в случае f_3CDM модели

Предсказания БМО для эволюции красного смещения и параметра уравнения состояния $\omega_{de} = \frac{p_{de}}{\rho_{de}}$ для наилучшего соответствия значениям параметров модели показаны на рисунке 3.15.

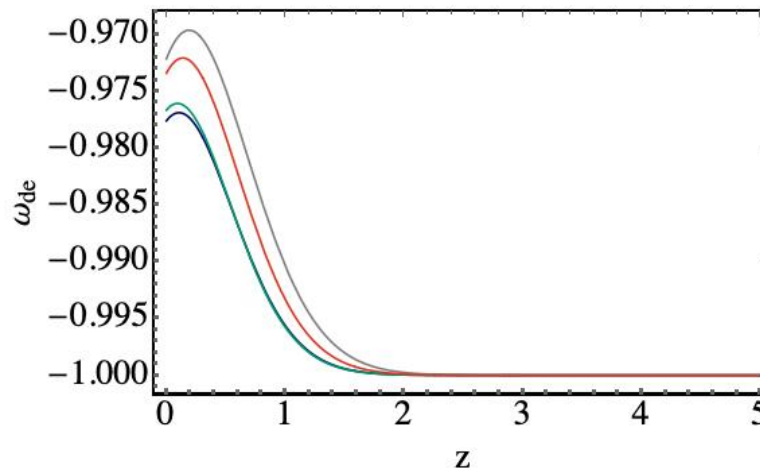


Рисунок 3.15 – Прогнозы БМО для эволюции красного смещения и параметра уравнения состояния $\omega_{de} = \frac{p_{de}}{\rho_{de}}$ в случае f_3CDM модели

Из рисунка 3.15, что модель ведет себя как космологическая постоянная, $\omega_{de} = -1$, при $z \geq 2.0$ и квинтэссенция ТЭ, $\omega_{de} > -1$, при $z < 2.0$. Другими словами, обучение на основе данных SLTD показывает, что недавняя Вселенная должна содержать квинтэссенцию ТЭ, которая начала свою эволюцию с

космологической постоянной. На рисунке 3.13 можно заметить хороший фазовый переход между замедляющейся и ускоряющейся фазой в изученном поведении параметра замедления q для пяти случаев, которые рассмотрены для данной f_3CDM модели. Однако эта f_3CDM модель дала результаты, отличные от двух предыдущих моделей.

В частности, f_3CDM модель может быть использована для решения проблемы напряженности H_0 . Однако следует отметить, что данные SLTD не могут дать окончательного ответа на вопрос, может ли f_3CDM модель решить проблему напряженности или нет. Другими словами, данные STLD могут сильно повлиять на понимание того, как решить проблему H_0 напряженности в $f(T)$ гравитации. Более того, это может сильно повлиять на ограничения на $\Omega_{dm}^{(0)}$, что также указывает на напряженность. Это еще одно важное следствие, которое БМО позволил вывести из изучения этой f_3CDM модели.

Необходимо упомянуть, что различная природа БМО как инструмента в сочетании с уравнениями (3.82) и (3.85) позволяет разработать конвейер для изучения и ограничения $f(T)$ гравитации для космологических целей [215, 216]. Это позволяет предсказать и узнать, как можно решить проблему напряженности H_0 и как данные SLTD могут оспорить ее в $f(T)$ гравитации.

Выводы по третьему разделу

Используя БМО, устранена напряженность постоянной Хаббла H_0 . С помощью БМО продемонстрировано, что существует отклонение от парадигмы холодной темной материи в космологических масштабах, что может эффективно решить проблему напряженности постоянной Хаббла H_0 .

Рассмотрены три реалистичные модели $f(T)$ гравитации, появившиеся в литературе, с двумя параметрами, из которых один является независимым. Используются доступные в настоящее время данные наблюдений Хаббла.

Использовано БМО для ограничения космологических моделей, основанных на $f(T)$ гравитации. Рассмотрены и изучены ограничения на степенные, экспоненциальные и экспоненциальные $f(T)$ модели с квадратным корнем, используя SLTD в качестве основного элемента процесса генерации и ключевого компонента вероятностного подхода МО. Получены очень жесткие ограничения на параметры, определяющие $f(T)$ модели.

Результаты показывают, что точные измерения временной задержки и количество линзовых систем могут существенно повлиять на ограничения на параметры модели. Принимая во внимание напряженность H_0 , проверены полученные результаты с помощью доступного ОНД и обнаружили признак напряженности, которое может существовать между линзовыми сигналами ГВ + ЭМВ и ОНД. Поэтому не исключено, что использование обоих методов может привести к некоторым ошибочным результатам при анализе модели. С другой

стороны, стало известно, что экспоненциальный $f(T)$ в свете данных SLTD может решить напряженность постоянной Хаббла H_0 , в то время как степенная модель немного отличается от Λ CDM и определенно не может решить проблему.

Случай степенной модели интересен по двум причинам: во-первых, она может быть очень близка к модели Λ CDM. Во-вторых, данные SLTD может указывать на незначительные отклонения от модели Λ CDM. Это еще одна проблема, которую для решения проблемы напряженности постоянной Хаббла H_0 следует оспорить в модели Λ CDM.

Однако, изучение экспоненциальной модели с квадратным корнем $f(T)$ показало, что данные LTD не могут указать, может ли модель решить проблему напряженности постоянной Хаббла H_0 . Наилучшим образом подходящим значениям параметров в случае экспоненциальной и экспоненциальной моделей с квадратным корнем $f(T)$, будет квинтэссенция Вселенной, в которой доминирует ТЭ, которая при относительно высоких оценках красного смещения содержит космологическую постоянную в виде ТЭ. Полученные результаты показывают, что во всех трех рассмотренных случаях ускоренный расширяющийся фазовый переход будет наблюдаться естественно и плавно.

Также необходимо упомянуть некоторые интересные аспекты, вытекающие из данного подхода. Поскольку расстояния с временной задержкой могут быть измерены по сигналам гравитационных волн линз и их соответствующим аналогам электромагнитных волн, данный подход может быть очень полезен в процессе идентификации источника. Действительно, найден четкий намек на то, что могут быть очень сильные ограничения на системы ГВ + ЭМВ с линзами, и разумная комбинация этого с моделированием, основанным на LSST, телескопе Эйнштейна и Обзоре темной энергии (DES), может обеспечить мощный инструмент для настоящего космологического анализа.

4 АЛГЕБРЫ ОПЕРАТОРОВ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА–ФОКА ДЛЯ ГРУПП ДВИЖЕНИЙ, ДЕЙСТВУЮЩИХ ТРАНЗИТИВНО НА ДВУМЕРНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО МНОГООБРАЗИЯ

Уравнение Клейна-Гордона-Фока описывает релятивистскую динамику скалярной частицы, взаимодействующей с электромагнитным полем. Возможность осуществления точного или надёжного приближённого интегрирования одночастичных уравнений движения заряженных пробных частиц даёт метод полного разделения переменных. Этот метод долгое время оставался единственно известным.

После появления работы [217] начали развиваться методы некоммутативного интегрирования в том числе для уравнения Дирака-Фока. В настоящее время найдены и приведены в литературе [218] все внешние электромагнитные поля, в которых допускает полное разделение переменных уравнение Гамильтона-Якоби для пробного заряда. Также осуществлена полная классификация допустимых электромагнитных полей для просто транзитивных групп движений G_3 . При этом группа G_3 действует на неизотропных гиперповерхностях пространственно-временного многообразия. В обоих случаях под допустимыми понимаются поля, для которых существует соответствующая алгебра операторов симметрии уравнений Гамильтона-Якоби и Клейна-Гордона-Фока первого (для группы G_r) или не выше второго (для полного набора) порядка. Приводится классификация всех допустимых внешних электромагнитных полей, как для операторов симметрии из полного набора, обеспечивающего полное разделение переменных, так и для операторов группы G_r .

4.1 Условия существования алгебры операторов симметрии

Рассмотрим пространственно-временное многообразие V_4 , на двухмерном подпространстве которого действует транзитивно группа G_r , $r \leq 3$. Координатные индексы переменных локальной координатной системы $[u^i]$ пространства V_4 будем снабжать малыми буквами латинского алфавита $i, j, k, l = 0, 1, 2, 3$. Координатные индексы переменных локальной координатной системы подпространства V_2 будем снабжать малыми буквами греческого алфавита $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$. Буквами a и b будем обозначать индексы, пробегаящие значение от 1 до 3. Предметом нашего изучения являются условия существования алгебры операторов симметрии (интегралов движения) классического и квантового уравнений движения для заряженной скалярной пробной частицы во внешнем электромагнитном поле для случая, когда в пространстве действует описанная выше группа.

Подпространство транзитивности, в котором действует группа G_r , задается системой уравнений [219].

$$\psi^p(u^i) = \text{const}, \quad (p, q = 0, \dots, n-r-1). \quad (4.1)$$

Если $\psi^p = u^p$, поверхность транзитивности задается условием $u^p = \text{const}$. при котором будет обозначена локальная система координат в подпространстве. Индексы варьируются от 1 до 3. Происходит суммирование в заданных пределах изменения индекса по повторяющимся верхнему и нижнему индексам. Предметом исследования являются условия существования алгебры симметричных операторов первого порядка (интегралов движения) классических [220, 221] и квантовых уравнений движения для заряженной скалярной пробной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Рассмотрим уравнение Гамильтона-Якоби для заряженной пробной частицы во внешнем электромагнитном поле с потенциалом A_i , который имеет вид:

$$\hat{H} = g^{ij} P_i P_j = m, \quad P_i = p_i + A_i, \quad p_i = \partial_i \varphi. \quad (4.2)$$

Интегралы движения свободного уравнения Гамильтона-Якоби задаются векторными полями Киллинга ξ_a^i и имеют вид

$$\hat{Y}_a = \xi_a^i p_i. \quad (4.3)$$

Как известно [222], при ненулевом электромагнитном поле уравнение (4.2) допускает интегралы движения вида (4.3), если \hat{Y}_a коммутируют с \hat{H} относительно скобок Пуассона

$$[H, \hat{Y}_a]_P = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \hat{Y}_a}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{Y}_a}{\partial p_i} = (g^{il} \xi_{\alpha,l}^j + g^{jl} \xi_{\alpha,l}^i - g_{,l}^{ij} \xi_{\alpha}^l) P_i P_j + 2g^{i\sigma} (\xi_{\alpha}^j F_{ji} + (\xi_{\alpha}^{\beta} A_{\beta})_{,i}) P_{\sigma} = 0. \quad (4.4)$$

Функции ζ_{α}^j удовлетворяют уравнениям Киллинга

$$g^{il} \zeta_{\alpha,l}^j + g^{jl} \zeta_{\alpha,l}^i - g_{,l}^{ij} \zeta_{\alpha}^l = 0, \quad (4.5)$$

и совпадают с векторным полем Киллинга

$$\zeta_{\alpha}^j = \xi_{\alpha}^j. \quad (4.6)$$

Коэффициенты $P_i P_j$, приведенные в уравнении, должны быть равны нулю. Следовательно, необходимое и достаточное условие этого имеет вид

$$(\xi_{\alpha}^j A_j)_{,i} = \xi_{\alpha}^j F_{ij}. \quad (4.7)$$

В отличие от свободного уравнения Гамильтона-Якоби, уравнение (4.1) в общем случае не имеет интегралов от движения. Система уравнений (4.7) определяет набор допустимых электромагнитных полей. В этих полях уравнение (4.3) имеет интегралы первого порядка от движения, определяемые группой. Подпространство транзитивности, в котором действует группа, задается системой уравнений: рассмотрим условие, приведенное в (4.7). Поскольку в выбранной системе координат $\xi_{\alpha,p}^j = 0$, следует

$$\xi_{\alpha}^{\beta} A_{p,\beta} = 0 \rightarrow A_p = A_p(u^q). \quad (4.8)$$

Таким образом, компоненты A_p могут быть сведены к нулю путем градиентного преобразования потенциала. Подбираем калибровку потенциала именно таким образом

$$A_p = 0. \quad (4.9)$$

Тогда из (4.9) следует

$$(\xi_{\alpha}^{\beta} A_{\beta})_{,\gamma} = \xi_{\alpha}^{\beta} F_{\gamma\beta}. \quad (4.10)$$

Действительно, система (4.7) может присутствовать в виде

$$\hat{Y}_{\alpha} A_{\beta} = C_{\alpha\beta}^{\gamma} A_{\gamma}, \quad A_{\beta} = \xi_{\beta}^{\alpha} A_{\alpha}. \quad (4.11)$$

Тогда условия совместимости могут быть преобразованы следующим образом

$$(\delta_{\alpha}^{\sigma} [\hat{Y}_{\beta} \hat{Y}_{\gamma}] - C_{\gamma\alpha}^{\sigma} \hat{Y}_{\beta} + C_{\beta\alpha}^{\sigma} \hat{Y}_{\gamma}) A_{\sigma} = (C_{\alpha\beta}^{\tau} C_{\gamma\tau}^{\sigma} + C_{\beta\gamma}^{\tau} C_{\alpha\tau}^{\sigma} + C_{\gamma\alpha}^{\tau} C_{\beta\tau}^{\sigma}) A_{\sigma} = 0. \quad (4.12)$$

Уравнения Гамильтона-Якоби и Клейна-Гордона-Фока допускают оператор симметрии вида [223, 224]

$$\hat{Y}_{\alpha} = \xi_{\alpha}^i (\hat{p}_i + A_i) + \gamma_{\alpha}. \quad (4.13)$$

тогда и только тогда, когда электромагнитное поле удовлетворяет системе уравнений

$$\gamma_{\alpha,i} = \xi_{\alpha}^j F_{ji}. \quad (4.14)$$

Сравнивая уравнения, видно

$$\gamma_\alpha = -\xi_\alpha^\beta A_\beta. \quad (4.15)$$

Таким образом, в отличие от свободного уравнения Гамильтона-Якоби, в общем случае уравнение интегралов движения первого порядка не имеет [225, 226]. Система уравнений определяет множество допустимых электромагнитных полей, в которых такие интегралы, задаваемые группой G_r , существуют. Заметим, что условие справедливо и в случае n -мерного пространства.

4.2 Алгебра операторов симметрии уравнения Клейна-Гордона-Фока

Рассмотрим уравнение Клейна-Гордона-Фока

$$\hat{H}\varphi = (g^{ij}\hat{P}_i\hat{P}_j)\varphi = m\varphi, \quad \hat{P}_j = -i\hat{\nabla}_j + A_j. \quad (4.16)$$

здесь $\hat{\nabla}_i$ – оператор ковариантной производной, с метрически совместимой связностью, соответствующий оператору частной производной $\hat{\partial}_i = i\hat{p}_i$ по координате, u_i , φ является полем скалярной частицы с массой m .

Обозначим оператор Лапласа-Бельтрами как \hat{H}_0

$$\hat{H}_0 = g^{ij}\hat{\nabla}_i\hat{\nabla}_j. \quad (4.17)$$

Тогда оператор \hat{H} может быть представлен в виде

$$\hat{H} = -\hat{H}_0 + \hat{H}_e. \quad \hat{H}_e = 2A^i\hat{p}_i - i(\hat{\nabla}_i A^i) + A_i A^i. \quad (4.18)$$

Алгебра операторов симметрии уравнения Клейна-Гордона-Фока совпадает с алгеброй Ли группы G_r . То есть оператор Клейна-Гордона-Фока коммутирует с операторами

$$\hat{Y}_\alpha = \xi_\alpha^i \hat{p}_i, \quad (4.19)$$

для допустимого внешнего электромагнитного поля. Действительно, коммутатор операторов \hat{H} и \hat{p}_i имеет вид

$$[\hat{H}_0, \hat{Y}_\alpha^i] = 0 \rightarrow [g^{ij}\hat{\partial}_i\hat{\partial}_j + (g_{,j}^{ij} + g^{ij}\chi_{,j}^i\hat{\partial}_i), \xi_\alpha^i\hat{\partial}_i] = 0. \quad (4.20)$$

Как известно

$$[\hat{H}, \hat{Y}_\alpha^i] = [\hat{H}_0, \hat{Y}_\alpha^i] + [\hat{H}_e, \hat{Y}_\alpha^i] = 0. \quad (4.21)$$

здесь $2\chi_i = -g_{kl}g_i^{kl}$.

Поскольку функции ξ_α^i удовлетворяют уравнениям Киллинга, из (4.20) получаем условие:

$$g^{il}\xi_{\alpha,il}^k + (g_{,l}^{il} + g^{il}\chi_{,l})\xi_{\alpha,i}^k - (g_{,l}^{il} + g^{il}\chi_{,l})_{,i}\xi_\alpha^i = 0. \quad (4.22)$$

Используя следствия из уравнений Киллинга, получаем

$$\begin{aligned} g_{,il}^{il}\xi_\alpha^k &= g^{ik}\xi_{\alpha,il}^l + g_{,l}^{il}\xi_{\alpha,i}^k, \\ g^{il}\chi_l\xi_{\alpha,i}^k - (g^{il}\chi_{,l})_{,i}\xi_\alpha^i &= g^{il}(\chi_{,l}\xi_\alpha^i)_{,i}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Теперь уравнение (4.23) сводится к виду

$$(\xi_{\alpha,i}^i + \chi_i\xi_\alpha^i)_{,l} = 0.$$

Ввиду того, что

$$2(\xi_{\alpha,i}^i + \chi_i\xi_\alpha^i) = \xi_\alpha^i g_{kl}g_i^{kl} + 2\xi_{\alpha,i}^i = 0, \quad (4.24)$$

уравнение (4.23) сводится к тождеству. Поскольку коммутатор $[\hat{H}_e, \hat{Y}_\alpha]$ равен нулю, получаем необходимые и достаточные условия существования алгебры операторов симметрии уравнения в виде

$$\begin{aligned} A^l\xi_{\alpha,l}^k - A_{,l}^k\xi_\alpha^l &= 0 \rightarrow (\xi_\alpha^\beta A_\beta)_{,i} = \xi_\alpha^\beta F_{i\alpha}, \\ \xi_\alpha^i (A_l A^l)_{,i} &= 0, \\ \xi_\alpha^k (A_{,l}^l + A^l \chi_{,l})_{,k} &= 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Уравнение (4.25) является следствием уравнений (4.23), (4.24) и уравнений Киллинга, потому что

$$\xi_\alpha^i A_l A^l_{,i} + \xi_\alpha^i A^l A_{l,i} = A_l A^k \xi_{\alpha,k}^l + \xi_\alpha^i A^l A_{l,i} = (\xi_\alpha^\beta A_\beta)_{,i} + \xi_\alpha^\beta F_{\beta i} = 0. \quad (4.26)$$

Рассмотрим уравнение (4.26). Используя условие (4.25), первый член может быть представлен в виде

$$\xi_\alpha^k A^l_{,kl} = (\xi_\alpha^k A^l_{,k})_{,l} - \xi_{\alpha,l}^k A^l_{,k} = (A^k \xi_{\alpha,kl}^l + \xi_{\alpha,l}^k A^l_{,k}) - \xi_{\alpha,l}^k A^l_{,k} = A^k \xi_{\alpha,kl}^l. \quad (4.27)$$

Второй член преобразуем следующим образом

$$(A^l \chi_l)_k \xi_\alpha^k = A^k (\xi_{\alpha,k}^l \chi_l + \xi_\alpha^l \chi_{,lk}) \rightarrow A^k (\xi_{\alpha,l}^l + \xi_\alpha^l \chi_{,l})_{,k} = 0. \quad (4.28)$$

Интегралы движения уравнений Гамильтона-Якоби и Клейна-Гордона-Фока существуют для одних и тех же электромагнитных полей и имеют одинаковую форму. Для того чтобы найти допустимые электромагнитные поля, необходимо исследовать условия совместимости системы, имеющей вид

$$\gamma_{\sigma,ai} - \gamma_{\sigma,i\alpha} = \xi_\sigma^\beta F_{i\alpha,\beta} + \xi_{\sigma,i}^\beta F_{\beta\alpha} - \xi_{\sigma,\alpha}^\beta F_{\beta i} = 0. \quad (4.29)$$

Система (4.29) должна быть дополнена идентификаторами Бьянки. Можно использовать решения $F_{i\alpha}$ для нахождения потенциала допустимого электромагнитного поля путем интегрирования совместимой системы уравнений

$$A_{\alpha,\beta} - A_{\beta,\alpha} = F_{\beta\alpha}. \quad (4.30)$$

В книге Петрова [227] перечислены все метрики пространственно-временных многообразий, в которых действуют группы $G_3(N)$ и приведены все операторы этих групп. Использовались обозначения, принятые в этой книге, за исключением того, что не игнорируемые переменные будут обозначаться через u^0 . Кроме того, для удобства будем использовать обозначения функций, которые зависят только от одной переменной $u^0 = u_0$, обозначаемой строчными греческими буквами с одним правым индексом.

4.2.1 Группа $G_2(N)$

Алгебра операторов действующей в пространстве группы является алгеброй операторов симметрии для уравнений Гамильтона-Якоби и Клейна-Гордона-Фока в допустимых электромагнитных полях. Заметим, что линейные по импульсам интегралы движения вида не обязательно образуют алгебру группы G_r . Более того, их может быть меньше r . При этом условия существования допустимого электромагнитного поля будет менее жестким.

Согласно классификации Бианки по вещественным неизоморфным структурам, в зависимости от набора структурных постоянных $C_{\alpha\beta}^\gamma$ имеются следующие структуры двух-параметрических и трёх-параметрических групп

$$G_2(I): C_{\alpha\beta}^\gamma = 0,$$

$$G_2(II): C_{\alpha\beta}^\gamma = \delta_1^\alpha,$$

$$G(I): C_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0,$$

$$G_3(II): C_{12}^{\alpha} = 0, C_{13}^{\alpha} = 0, C_{23}^{\alpha} = \delta_1^{\alpha},$$

$$G_3(III): C_{12}^{\alpha} = 0, C_{13}^{\alpha} = 0, C_{23}^{\alpha} = \delta_1^{\alpha},$$

$$G_3(IV): C_{12}^{\alpha} = 0, C_{13}^{\alpha} = \delta_1^{\alpha}, C_{23}^{\alpha} = \delta_1^{\alpha} + \delta\alpha_1,$$

$$G_3(V): C_{12}^{\alpha} = 0, C_{13}^{\alpha} = \delta_1^{\alpha}, C_{23}^{\alpha} = \delta_2^{\alpha},$$

$$G_3(VI): C_{12}^{\alpha} = 0, C_{13}^{\alpha} = \delta_1^{\alpha}, C_{23}^{\alpha} = q\delta_2^{\alpha}, q \neq 0,1,$$

$$G_3(VII): C_{12}^{\alpha} = 0, C_{13}^{\alpha} = \delta_2^{\alpha}, C_{23}^{\alpha} = 2\delta_2^{\alpha} \cos \alpha, \alpha = const,$$

$$G_3(VIII): C_{12}^{\alpha} = \delta_1^{\alpha}, C_{13}^{\alpha} = 2\delta_2^{\alpha}, C_{23}^{\alpha} = \delta_3^{\alpha} + q\delta_2^{\alpha}, q \neq 0,1,$$

$$G_3(IX): C_{12}^{\alpha} = \delta_3^{\alpha}, C_{13}^{\alpha} = -\delta_2^{\alpha}, C_{23}^{\alpha} = \delta_1^{\alpha}.$$

Далее исследуем приведенную систему уравнений для случая, когда группа действует на двумерных пространствах транзитивности. При этом выбрана калибровка потенциала, при которой $A_0 = 0$.

1. Если группа $G_2(I)$ действует на неизотропном подпространстве транзитивности или, имея особый оператор, – на изотропном, то векторные поля Киллинга принимают вид

$$\xi_1^i = \delta_1^i, \quad \xi_2^i = \delta_2^i. \quad (4.31)$$

Из уравнений Киллинга следует

$$ds^2 = a_{ij} du^i du^j, \quad a_{0i} = \delta_{0i}, \quad a_{ij} = a_{ij}(u^0, u^3). \quad (4.32)$$

Здесь и далее,

$$a_{ij} = a_{ij}(u^0, u^3). \quad (4.33)$$

В случае изотропной поверхности транзитивности, дополнительно к этому

$$g_{a1} = \delta_{a3} g_{a3}. \quad (4.34)$$

Подставим уравнения в систему уравнений. В результате получим потенциал допустимого электромагнитного поля

$$A_0 = 0, \quad A_{\alpha} = \alpha_{\alpha}(u^0, u^3). \quad (4.35)$$

Пусть теперь группа $G_2(I)$ не имеет особого оператора и действует на изотропном подпространстве транзитивности. В этом случае векторное поле Киллинга можно записать в виде

$$\xi_1^i = \delta_2^i, \quad \xi_2^i = u^3 \delta_2^i - \delta_1^i. \quad (4.36)$$

Данная группа действует на двух пространствах, задаваемых метриками

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \quad ds^2 = a_{22} (du^2)^2 + \left[a_{33} + 2u^1 a_{23} + (u^1)^2 a_{22} \right] (du^3)^2 + 2(a_{23} + u^1 a_{22}) du^3 du^2 + \\ + 2a_{01} du^0 du^1 + 2a_{03} du^0 du^3, \\ b) \quad ds^2 = a_{22} (du^2)^2 + \left[a_{33} + 2u^1 a_{23} + (u^1)^2 a_{22} \right] (du^3)^2 + 2(a_{23} + u^1 a_{22}) du^3 du^2 + \\ + 2a_{13} du^1 du^3 + e (du^0)^2, \quad e^2 = 1. \end{array} \right. \quad (4.37)$$

Система уравнений распадается на две подсистемы

$$\xi_{\alpha,3}^\beta A_\beta = -\xi_\alpha^\beta A_{3,\beta}, \quad (4.38)$$

$$\xi_\alpha^\gamma A_{\beta,\gamma} = C_{\alpha\beta}^\gamma A_\gamma = 0, \quad (4.39)$$

где $A_\alpha = \xi_\alpha^\beta A_\beta$.

Решение этих систем имеет вид

$$A_\beta = \alpha_\beta(u^0, u^3), \quad A_3 = u^1 \alpha_2 - \beta(u^0, u^3). \quad (4.40)$$

Выражая функции A_α через A_a , получим окончательно

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \alpha_1(u^0, u^3) u^3, \quad A_2 = \alpha_1(u^0, u^3), \quad A_3 = u^1 \alpha_1 + \beta(u^0, u^3). \quad (4.41)$$

2. Если группа $G_2(II)$ действует на неизотропном подпространстве транзитивности или, имея особый оператор, на изотропном, то векторные поля Киллинга принимают вид

$$\xi_1^i = \delta_1^i, \quad \xi_2^i = u^1 \delta_1^i - \delta_2^i. \quad (4.42)$$

Из уравнений Киллинга следует

$$ds^2 = a_{11} (du^1)^2 \exp 2u^2 + a_{22} (du^2)^2 + a_{33} (du^3)^2 + 2a_{23} du^3 du^2 + 2a_{12} du^1 du^2 \exp u^2 + \\ + 2a_{13} du^1 du^3 \exp u^2 + e (du^0)^2, \quad e^2 = 1, \quad a_{ab} = a_{ab}(u^0, u^3). \quad (4.43)$$

В случае изотропной поверхности транзитивности

$$g_{\alpha 1} = \delta_{a3} a_{a3} \exp u^2. \quad (4.44)$$

3. Если группа не содержит особого оператора, решение уравнения Киллинга имеет вид

$$ds^2 = a_{11} (du^1)^2 \exp 2u^2 + a_{33} (du^3)^2 + 2a_{13} du^3 du^1 \exp u^2 + 2a_{23} du^2 du^3 + e (du^0)^2. \quad (4.45)$$

Система после подстановки распадается на две подсистемы

$$\xi_{\alpha}^{\beta} A_{3,\beta} = 0 \rightarrow A_3 = \gamma(u^0, u^3), \quad (4.46)$$

$$\xi_{\alpha}^{\gamma} A_{\beta,\gamma} = C_{\alpha\beta}^{\gamma} A_{\gamma}, \quad (4.47)$$

где $A_{\alpha} = \xi_{\alpha}^{\beta} A_{\beta}$.

Решение этих систем имеет вид

$$A_1 = \alpha(u^0, u^3) \exp u^2, \quad A_2 = u^1 \alpha(u^0, u^3) \exp u^2 - \beta(u^0, u^3). \quad (4.48)$$

Выражая функции A_{α} через A_a , получим окончательно

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \alpha(u^0, u^3) \exp u^2, \quad A_2 = \beta(u^0, u^3), \quad A_3 = \gamma(u^0, u^3). \quad (4.49)$$

4.2.3 Группа $G_3(N)$

Согласно классификации Бьянки, в зависимости от набора структурных констант $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$, существует 9 типов групп $G_3(N)$., первые семь групп разрешимы.

Группы $G_3(I) - G_3(VII)$ содержат Абелеву подгруппу с одинаковыми векторами $\xi_1^i = \delta_1^i$, $\xi_2^i = \delta_2^i$. Следовательно, из тождеств Бьянки следует

$$F_{ij,1} = F_{ij,2} = F_{12,3} = F_{12,0} = 0, \quad F_{13,0} + F_{01,3} = 0, \quad F_{23,0} + F_{02,3} = 0. \quad (4.50)$$

Для групп $G(I) - G(VI)$ функции ξ_3^{α} , $\xi_{3,i}^{\alpha}$ могут быть представлены в виде общей формулы (4.51)

$$\xi_3^{\alpha} = (k u_1 + \varepsilon u_2) \delta_1^{\alpha} + n u_2 \delta_2^{\alpha} - \delta_3^{\alpha}, \quad \xi_{3,i}^{\alpha} = (k \delta_{i1} + \varepsilon \delta_{i2}) \delta_2^{\alpha} + n \delta_{i2} \delta_2^i. \quad (4.51)$$

Параметры k , ε , n для каждого числа N принимают значения

$$N = I \quad \rightarrow k = n = \varepsilon = 0, \quad (4.52)$$

$$N = II \quad \rightarrow k = n = 0, \quad \varepsilon = 1, \quad (4.53)$$

$$N = III \quad \rightarrow k = 1, \quad n = \varepsilon = 0, \quad (4.54)$$

$$N = IV \quad \rightarrow k = n = \varepsilon = 1, \quad (4.55)$$

$$N = V \quad \rightarrow k = n = 1, \quad \varepsilon = 0, \quad (4.56)$$

$$N = VI \quad \rightarrow k = 1, \quad n = 2, \quad \varepsilon = 0. \quad (4.57)$$

Система уравнений вместе с тождествами Бьянки имеет вид

$$\begin{cases} F_{01,3} = kF_{01}, & F_{02,3} = \varepsilon F_{01} + nF_{02}, & F_{03,3} = 0, \\ F_{13,3} = kF_{13}, & F_{12,3} = (k+n)F_{12}, & F_{23,3} = \varepsilon F_{13} + nF_{23}, \\ F_{12,0} = F_{12,3} = 0, & F_{01,3} + F_{13,0} = 0, & F_{02,3} + F_{23,0} = 0. \end{cases} \quad (4.58)$$

Для группы $G(VII)$ функции ξ_3^α , $\xi_{3,i}^\alpha$ могут быть представлены следующим образом

$$\xi_3^\alpha = -u_2 \delta_1^\alpha + (2u_2 \cos \alpha + u_1) \delta_2^\alpha + \delta_3^\alpha, \quad \xi_{3,i}^\alpha = -\delta_{i2} \delta_1^\alpha + (2\delta_{i2} \cos \alpha + \delta_{i1}) \delta_2^\alpha. \quad (4.59)$$

Рассмотрим уравнения для каждой из групп $G_3(I) - G_3(VI)$. Запишем метрику для группы $G_3(I)$

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta + e du^{0^2}, \quad e^2 = 1. \quad (4.60)$$

Потенциал допустимого электромагнитного поля для группы $G_3(I)$

$$A_0 = 0, \quad A_\alpha = \alpha_\alpha, \quad \alpha_\alpha = \alpha_\alpha(u^0). \quad (4.61)$$

Интеграл движения для группы $G_3(I)$

$$\hat{Y}_\alpha = \hat{p}_\alpha. \quad (4.62)$$

Для группы $G_3(I)$ в случае $\xi_3^i = \delta_3^i$ следует

$$F_{ij,3} = 0, \quad F_{\alpha\beta,0} = 0 \rightarrow F_{\alpha 0} = \dot{\beta}_\alpha(u_0). \quad (4.63)$$

Потенциал выводится из системы дифференциальных уравнений

$$A_{j,i} - A_{j,i} = F_{ij}, \quad (4.64)$$

и имеет вид

$$A_\alpha = \beta_\alpha + \tilde{c}_{\alpha\beta} u^\beta, \quad \tilde{c}_{\alpha\beta} = -\tilde{c}_{\beta\alpha}. \quad (4.65)$$

Отсюда видно, что $\tilde{c}_{\alpha\beta} = 0$.

Теперь запишем метрику для группы $G_3(II)$

$$\begin{aligned} ds^2 = & du^1{}^2 a_{11} + 2du^1 du^2 (a_{12} + a_{11}u^3) + 2du^1 du^3 a_{13} + \\ & du^2{}^2 (a_{22} + 2a_{12}u^3 + a_{11}u^3{}^2) + 2du^2 du^3 (a_{23} + a_{13}u^3) + \\ & + du^3{}^2 a_{33} + edu^3{}^2, \quad e^2 = 1. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Потенциал допустимого электромагнитного поля для группы $G_3(II)$

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \alpha_0, \quad A_2 = \alpha_0 u_3 + \beta_0, \quad A_3 = \gamma_0. \quad (4.67)$$

Интеграл движения для группы $G_3(II)$

$$\hat{Y}_1 = \hat{p}_1, \quad \hat{Y}_2 = \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_3 = u^2 \hat{p}_1 - \hat{p}_3. \quad (4.68)$$

Для группы $G_3(II)$ в случае $k = n = 0$, $\varepsilon = 1$ и система уравнений имеют вид

$$\begin{cases} F_{12,3} = F_{12,0} = F_{13,3} = F_{03,3} = 0, \\ F_{02,3} = F_{01}, \quad F_{23,0} + F_{02,3} = 0, \quad F_{23,3} + F_{13} = 0, \\ F_{13,0} + F_{01,3} = 0, \quad F_{23,0} + F_{02,3} = 0. \end{cases} \quad (4.69)$$

Из первых уравнений в случае системы имеем

$$F_{12} = \tilde{a}, \quad F_{03} = \dot{\gamma}_0, \quad F_{13} = 2\tilde{b}. \quad (4.70)$$

Подставляя эти уравнения в остальные уравнения системы, получаем

$$F_{01} = \dot{\alpha}_0, \quad F_{02} = \dot{\alpha}_0 u_3 + \dot{\beta}_0, \quad F_{23} = -\alpha_0 + 2\tilde{b}u_3. \quad (4.71)$$

Конкретное решение системы в выбранном расчёте имеет вид

$$A_1 = \alpha_0 - 2\tilde{b}u_3, \quad A_2 = \alpha_0 u_3 + \beta_0 + \tilde{a}u_1 - \tilde{b}u_3^2, \quad A_3 = \gamma_0. \quad (4.72)$$

Используя уравнения, можно показать, что $\tilde{a} = \tilde{b} = 0$.

Теперь запишем метрику для группы $G_3(III)$

$$ds^2 = du^{12} a_{11} \exp 2u^3 + 2du^1 du^2 a_{12} \exp u^3 + 2du^1 du^3 a_{13} \exp u^3 + \\ 2du^2 du^3 a_{23} + du^{22} a_{22} + du^{32} a_{33} + edu^{32}, \quad e^2 = 1. \quad (4.73)$$

Потенциал допустимого электромагнитного поля для группы $G_3(III)$

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \alpha_0 \exp u^3, \quad A_2 = \beta_0, \quad A_3 = \gamma_0. \quad (4.74)$$

Интеграл движения для группы $G_3(III)$

$$\hat{Y}_1 = \hat{p}_1, \quad \hat{Y}_2 = \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_3 = u^1 \hat{p}_1 - \hat{p}_3. \quad (4.75)$$

Для группы $G_3(III)$ в случае $k = 0$, $n = \varepsilon = 0$ и системы уравнений имеют вид

$$\begin{cases} F_{03,3} = F_{02,3} = F_{23,3} = F_{12,3} = F_{12,0} = 0, \\ F_{01,3} = F_{01}, \quad F_{12,3} = F_{12}, \quad F_{13,3} = F_{13}, \\ F_{23,0} + F_{02,3} = 0, \quad F_{13,0} + F_{01,3} = 0. \end{cases} \quad (4.76)$$

Следовательно, находим функции F_{ij}

$$F_{01} = \dot{\alpha}_0 \exp u_3, \quad F_{02} = \dot{\beta}_0, \quad F_{03} = \dot{\gamma}_0, \quad F_{12} = 0, \quad F_{13} = -\alpha_0 \exp u_3, \quad F_{23} = \tilde{a}. \quad (4.77)$$

Конкретное решение системы в выбранном расчёте имеет вид

$$A_1 = \alpha_0 \exp u_3, \quad A_2 = \beta_0, \quad A_3 = \gamma_0 + \tilde{a}u_2. \quad (4.78)$$

Используя уравнения, можно показать, что $\tilde{a} = 0$.

Теперь рассмотрим метрику для группы $G_3(IV)$

$$ds^2 = du^1{}^2 a_{11} \exp 2u^3 + 2du^1 du^2 (a_{12} + a_{11} u^3) \exp 2u^3 + 2du^1 du^3 a_{13} \exp u^3 + 2du^2 du^3 (a_{23} + a_{13} u^3) \exp u^3 + du^2{}^2 (a_{22} + 2a_{12} u^3 + a_{11} u^3{}^2) \exp 2u^3 + du^3{}^2 a_{33} + edu^3{}^2, \quad e^2 = 1. \quad (4.79)$$

Потенциал допустимого электромагнитного поля для группы $G_3(IV)$

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \alpha_0 \exp u^3, \quad A_2 = (\alpha_0 u^3 + \beta_0) \exp u^3, \quad A_3 = \gamma_0. \quad (4.80)$$

Интеграл движения для группы $G_3(IV)$

$$\hat{Y}_1 = \hat{p}_1, \quad \hat{Y}_2 = \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_3 = (u^2 + u^1) \hat{p}_1 + u^2 \hat{p}_2 - \hat{p}_3. \quad (4.81)$$

Для группы $G_3(IV)$ в случае $k = n = \varepsilon = 1$ и системы уравнений имеют вид

$$\begin{cases} F_{01,3} = F_{01}, & F_{02,3} = F_{01} + F_{02}, & F_{03,3} = 0, \\ F_{12,3} = 2F_{12}, & F_{13,3} = F_{13}, & F_{23,3} = F_{23} + F_{13} = 0, F_{13,0} + F_{01,3} = 0, \\ F_{23,0} + F_{02,3} = 0, & F_{01,3} + F_{13,0} = 0, & F_{12,3} = 0 \end{cases} \quad (4.82)$$

Отсюда следует

$$F_{01} = \dot{\alpha}_0 \exp u_3, \quad F_{02} = (\dot{\alpha}_0 u_3 + \dot{\beta}_0) \exp u_3, \quad F_{03} = \dot{\gamma}_0, \quad (4.83)$$

$$F_{12} = 0, \quad F_{13} = -\alpha_0 \exp u_3, \quad F_{23} = -(\alpha_0 u^3 + \alpha_0 + \beta_0) \exp u_3. \quad (4.84)$$

Конкретное решение системы в выбранном расчёте имеет вид

$$A_1 = \alpha_0 \exp u_3, \quad A_2 = (\alpha_0 u_3 + \beta_0) \exp u_3, \quad A_3 = \gamma_0. \quad (4.85)$$

Теперь рассмотрим метрику для группы $G_3(V)$

$$ds^2 = du^1{}^2 a_{11} \exp 2u^3 + 2du^1 du^2 a_{12} \exp 2u^3 + 2du^1 du^3 a_{13} \exp u^3 + 2du^2 du^3 a_{23} u^3 \exp u^3 + du^2{}^2 a_{22} \exp 2u^3 + du^3{}^2 a_{33} + edu^3{}^2, \quad e^2 = 1. \quad (4.86)$$

Потенциал допустимого электромагнитного поля для группы $G_3(V)$

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \alpha_0 \exp u^3, \quad A_2 = \beta_0 \exp u^3, \quad A_3 = \gamma_0. \quad (4.87)$$

Интеграл движения для группы $G_3(V)$

$$\hat{Y}_1 = \hat{p}_1, \quad \hat{Y}_2 = \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_3 = u^1 \hat{p}_1 + u^2 \hat{p}_2 - \hat{p}_3 \quad (4.88)$$

Для группы $G_3(V)$ в случае $k = n = 1$, $\varepsilon = 0$, и системы уравнений имеют вид

$$\begin{cases} F_{01,3} = F_{01}, & F_{02,3} = F_{02}, & F_{03,3} = 0, \\ F_{12,3} = F_{12}, & F_{13,3} = F_{13}, & F_{23,3} = F_{23}, \\ F_{13,0} + F_{01,3} = 0, & F_{23,0} + F_{02,3} = 0, & F_{12,3} = F_{12,0} = 0. \end{cases} \quad (4.89)$$

Отсюда следует

$$F_{01} = \dot{\alpha}_0 \exp u_3, \quad F_{02} = \dot{\beta}_0 \exp u_3, \quad F_{03} = \dot{\gamma}_0, \quad (4.90)$$

$$F_{12} = 0, \quad F_{13} = -\alpha_0 \exp u_3, \quad F_{23} = -\beta_0 \exp u_3. \quad (4.91)$$

Конкретное решение системы в выбранном расчёте имеет вид

$$A_1 = \alpha_0 \exp u_3, \quad A_2 = \beta_0 \exp u_3, \quad A_3 = \gamma_0. \quad (4.92)$$

Теперь рассмотрим метрику для группы $G_3(VI)$

$$\begin{aligned} ds^2 = & du^{1^2} a_{11} \exp 2u^3 + 2du^1 du^2 a_{12} \exp 3u^3 + 2du^1 du^3 a_{13} \exp u^3 + \\ & 2du^2 du^3 a_{23} u^3 \exp 2u^3 + du^{2^2} a_{22} \exp 4u^3 \\ & + du^{3^2} a_{33} + edu^{3^2}, \quad e^2 = 1. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Потенциал допустимого электромагнитного поля для группы $G_3(VI)$

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \alpha_0 \exp u^3, \quad A_2 = \beta_0 \exp 2u^3, \quad A_3 = \gamma_0. \quad (4.94)$$

Интеграл движения для группы $G_3(VI)$

$$\hat{Y}_1 = \hat{p}_1, \quad \hat{Y}_2 = \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_3 = u^1 \hat{p}_1 + 2u^2 \hat{p}_2 - \hat{p}_3. \quad (4.95)$$

Для группы $G_3(VI)$ в случае $k=1$, $n=2$, $\varepsilon=0$ и системы уравнений имеют вид:

$$\begin{cases} F_{01,3} = F_{01}, & F_{02,3} = 2F_{02}, & F_{03,3} = 0, \\ F_{12,3} = 3F_{12}, & F_{13,3} = F_{13}, & F_{23,3} = 2F_{23}, \\ F_{12,0} = F_{12,3} = 0, & F_{13,0} + F_{01,3} = 0, & F_{23,0} + F_{02,3} = 0. \end{cases} \quad (4.96)$$

Отсюда следует

$$F_{01} = \dot{\alpha}_0 \exp u_3, \quad F_{02} = \dot{\beta}_0 \exp 2u_3, \quad F_{03} = \dot{\gamma}_0, \quad (4.97)$$

$$F_{12} = 0, \quad F_{13} = -\alpha_0 \exp u_3, \quad F_{23} = -2\beta_0 \exp 2u_3. \quad (4.98)$$

Конкретное решение в выбранном расчёте имеет вид

$$A_1 = \alpha_0 \exp u_3, \quad A_2 = \beta_0 \exp 2u_3, \quad A_3 = \gamma_0. \quad (4.99)$$

Теперь рассмотрим метрику для группы $G_3(VII)$

$$\begin{aligned} ds^2 = & du^1{}^2 [a_{11} + a_{12} \cos(2u^3 \sin \alpha) + a_{22} \sin(2u^3 \sin \alpha)] \exp(2u^3 \cos \alpha) + 2du^1 du^2 [a_{11} \cos \alpha + (a_{12} \cos \alpha + \\ & + a_{22} \sin \alpha) \cos(2u^3 \sin \alpha) + (a_{22} \cos \alpha - a_{12} \sin \alpha) \sin(2u^3 \sin \alpha)] \exp(2u^3 \cos \alpha) + \\ & du^2{}^2 [a_{11} + (a_{12} \cos 2\alpha + a_{22} \sin 2\alpha) \cos(2u^3 \sin \alpha) + (a_{22} \cos 2\alpha - a_{12} \sin 2\alpha) \sin(2u^3 \sin \alpha)] \exp(2u^3 \cos \alpha) + \\ & 2du^1 du^3 [(a_{13} \cos \alpha - a_{23} \sin \alpha) \cos(u^3 \sin \alpha) + (a_{13} \sin \alpha + a_{22} \cos \alpha) \sin(u^3 \sin \alpha)] \exp(u^3 \cos \alpha) + \\ & 2du^2 du^3 [a_{23} \sin(2u^3 \sin \alpha) + a_{13} \cos(2u^3 \sin \alpha)] \exp(u^3 \cos \alpha) + du^3{}^2 a_{33} + edu^3{}^2, \quad e^2 = 1. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Потенциал допустимого электромагнитного поля для группы

$$A_0 = 0, \quad A_1 = (\alpha_0 \sin(\alpha + u^3 \sin \alpha) + \beta_0 \cos(\alpha + u^3 \cos \alpha)) \exp(-u^3 \cos \alpha), \quad (4.101)$$

$$A_2 = (\alpha_0 \sin(u^3 \sin \alpha) + \beta_0 \cos(u^3 \cos \alpha)) \exp(-u^3 \cos \alpha), \quad A_3 = \gamma_0. \quad (4.102)$$

Интеграл движения для группы $G_3(VII)$

$$\hat{Y}_1 = \hat{p}_1, \quad \hat{Y}_2 = \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_3 = -u^2 \hat{p}_1 + (2u^2 \cos \alpha + u^1) \hat{p}_2 + \hat{p}_3. \quad (4.103)$$

В этом случае системы уравнений могут быть представлены в виде

$$F_{i\alpha,3} + \delta_{1i} F_{2\alpha} - \delta_{1\alpha} F_{2i} + \delta_{2i} (2F_{2\alpha} \cos \alpha - F_{1\alpha}) - \delta_{2\alpha} (2F_{2i} \cos \alpha - F_{1i}) = 0. \quad (4.104)$$

Следовательно, используя также тождества Бьянки, получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} F_{01,3} + F_{02} = 0, & F_{02,3} + 2\cos\alpha F_{02} - F_{01} = 0, & F_{23,3} + 2\cos\alpha F_{23} - F_{13} = 0, \\ F_{03,3} = 0; F_{12} = 0, & F_{13,3} + F_{23} = 0, \\ F_{13,0} + F_{01,3} = 0, & F_{23,0} + F_{02,3} = 0. \end{cases} \quad (4.105)$$

Прежде всего, найдем функции F_{13} , F_{02}

$$F_{13} = (\nu_0 \sin(u_3 \sin \alpha) + \mu_0 \cos(u_3 \cos \alpha)) \exp(-u_3 \cos \alpha), \quad (4.106)$$

$$F_{02} = (\dot{\alpha}_0 \sin(u_3 \sin \alpha) + \dot{\beta}_0 \cos(u_3 \cos \alpha)) \exp(-u_3 \cos \alpha). \quad (4.107)$$

Помещая их в уравнения системы найдем связь между функциями $\alpha_0, \beta_0, \nu_0, \mu_0$:

$$\nu_0 = \alpha_0, \quad \mu_0 = \beta_0, \quad (4.108)$$

после чего, исходя из отношений

$$F_{02} = -F_{01,3}, \quad F_{23} = -F_{13,3}, \quad F_{03} = 0, \quad (4.109)$$

получаем функции F_{01} , F_{23} , F_{03}

$$F_{23} = (\alpha_0 \sin(-\alpha + u_3 \sin \alpha) + \beta_0 \cos(-\alpha + u_3 \cos \alpha)) \exp(-u_3 \cos \alpha), \quad (4.110)$$

$$F_{01} = (\dot{\alpha}_0 \sin(\alpha + u_3 \sin \alpha) + \dot{\beta}_0 \cos(\alpha + u_3 \cos \alpha)) \exp(-u_3 \cos \alpha), \quad F_{03} = \dot{\gamma}_0. \quad (4.111)$$

Конкретное решение системы в выбранном расчете имеет вид

$$A_1 = (\alpha_0 \sin(\alpha + u_3 \sin \alpha) + \beta_0 \cos(\alpha + u_3 \cos \alpha)) \exp(-u_3 \cos \alpha), \quad (4.112)$$

$$A_2 = (\alpha_0 \sin(u_3 \sin \alpha) + \beta_0 \cos(u_3 \cos \alpha)) \exp(-u_3 \cos \alpha), \quad A_3 = \gamma_0. \quad (4.113)$$

Теперь рассмотрим метрику для группы $G_3(VIII)$

$$\begin{aligned} ds^2 = & du^1{}^2 a_{11} + 2du^1 du^2 (a_{11} u^1{}^2 - 2a_{13} u^1 + a_{12}) \exp - u^3 + 2du^1 du^3 (a_{13} - a_{11} u^1) + \\ & du^2{}^2 [a_{22} - 4a_{23} u^1 + 2(a_{12} + 2a_{33}) u_1^2 - 4a_{13} u^1{}^3 + a_{11} u^1{}^4] \exp - 2u^3 \\ & + 2du^2 du^3 [a_{23} - (a_{12} + 2a_{33}) u_1 + 3a_{13} u^1{}^2 - a_{11} u^1{}^3] \exp - u^3 \\ & + 2du^3{}^2 (a_{11} u^1{}^2 - 2a_{13} u^1 + a_{33}) + edu^{02}, \quad e^2 = 1. \end{aligned} \quad (4.114)$$

И метрику для группы $G_3(IX)$

$$\begin{aligned} ds^2 = & du^1{}^2 [a_{11} - (a_{12} \cos 2u^3 + a_{22} \sin 2u^3)] + 2du^1 du^3 ((a_{13} \cos u^3 - a_{23} \sin u^3) + \\ & + 2du^1 du^2 [(a_{13} \cos u^3 - a_{23} \sin u^3) \cos u^1 + (a_{12} \cos 2u^3 - a_{22} \sin 2u^3) \sin u^1] \\ & + du^2{}^2 [a_{33} \cos u^1{}^2 + (a_{23} \cos u^3 + a_{13} \sin u^3) \sin 2u^1 + (a_{12} \sin 2u^3 + a_{22} \cos 2u^3 + a_{11}) \sin u^1{}^2] \\ & 2du^2 du^3 (a_{33} \cos u_1 + (a_{23} \cos u^3 + a_{13} \sin u^3) \sin u^1) + du^3{}^2 a_{33} + edu^{02}. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Потенциал допустимого электромагнитного поля для группы $G_3(VIII)$

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \alpha_0, \quad A_2 = (\alpha_0 u_1^2 + 2\beta_0 u^1 + \gamma_0) \exp - u^3, \quad A_3 = -(\alpha_0 u^1 + \beta_0). \quad (4.116)$$

и для группы $G_3(IX)$

$$A_0 = A_3 = 0, \quad A_1 = (\alpha_0 \cos u^3 - \beta_0 \sin u^3), \quad A_2 = (\alpha_0 \sin u^3 + \beta_0 \cos u^3) \sin u^1. \quad (4.117)$$

Интеграл движения для группы $G_3(VIII)$

$$\hat{Y}_1 = \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_2 = u^2 \hat{p}_2 + \hat{p}_3, \quad \hat{Y}_3 = \hat{p}_1 \exp u^3 + \hat{p}_2 u^2{}^2 + 2u^2 \hat{p}_3, \quad (4.118)$$

и для группы $G_3(IX)$

$$\hat{Y}_1 = \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_2 = \hat{p}_1 \cos u^2 + (\hat{p}_3 - \hat{p}_2 \cos u^1) \frac{\sin u^2}{\sin u^1}, \quad \hat{Y}_3 = -\hat{p}_1 \sin u^2 + (\hat{p}_3 - \hat{p}_2 \cos u^1) \frac{\cos u^2}{\sin u^1}. \quad (4.119)$$

Неразрешимые группы $G_3(VIII)$ и $G_3(IX)$ не содержат Абелевых подгрупп и имеют более сложные алгебраические структуры

$$G_3(VIII): C_{12}^\alpha = \delta_1^\alpha, \quad C_{13}^\alpha = 2\delta_2^\alpha, \quad C_{23}^\alpha = -\delta_3^\alpha, \quad (4.120)$$

$$G_3(IX): C_{12}^\alpha = \delta_3^\alpha, \quad C_{13}^\alpha = -\delta_2^\alpha, \quad C_{23}^\alpha = \delta_1^\alpha. \quad (4.121)$$

Для обеих структур векторное поле ξ_1^i Киллинга имеет вид

$$\xi_1^i = \delta_2^i. \quad (4.122)$$

Для случая, когда $\sigma = 1$ следует

$$F_{ij,2} = 0. \quad (4.123)$$

Принимая это условие во внимание, рассмотрим остальные уравнения системы.

Для группы $G_3(VIII)$ функции ξ_2^α , ξ_3^α и их производные имеют вид

$$\begin{cases} \xi_2^\alpha = u_2 \delta_2^\alpha + \delta_3^\alpha, & \xi_{2,i}^\alpha = \delta_{i2} \delta_2^\alpha, \\ \xi_3^\alpha = \delta_1^\alpha \exp u_3 + \delta_2^\alpha u_2^2 + 2u_2 \delta_3^\alpha, & \xi_{3,i}^\alpha = \delta_{3i} \delta_1^\alpha \exp u_3 + 2(u_2 \delta_2^\alpha + \delta_3^\alpha) \delta_{2i}. \end{cases} \quad (4.124)$$

Так как $F_{ij,2} = 0$, система уравнений распадается на две

$$\begin{cases} F_{i\alpha,3} + (\delta_{3i} F_{1\alpha} - \delta_{3\alpha} F_{1i}) + 2(\delta_{2i} 2F_{3\alpha} - \delta_{2\alpha} F_{3i}) \exp -u_3 = 0, \\ F_{i\alpha,3} + \delta_{1i} F_{2\alpha} - \delta_{1\alpha} F_{2i} + \delta_{2i} (2F_{2\alpha} \cos \alpha - F_{1\alpha}) - \delta_{2\alpha} (2F_{2i} \cos \alpha - F_{1i}) = 0. \end{cases} \quad (4.125)$$

Следовательно, используя также тождества Бьянки, получаем следующую систему уравнений

$$F_{01} = \dot{\alpha}_0, \quad F_{02} = (\dot{\alpha}_0 u_1^2 + 2\dot{\beta}_0 u_1 + \dot{\gamma}_0) \exp -u_3, \quad F_{03} = -(\dot{\alpha} u_1 + \dot{\beta}_0), \quad (4.126)$$

$$F_{12} = 2(\alpha_0 u_1 + \beta_0) \exp -u_3, \quad F_{13} = -\alpha_0, \quad F_{23} = (\alpha_0 u_1^2 + 2\beta_0 u_1 + \gamma_0) \exp -u_3. \quad (4.127)$$

Решение системы в выбранном расчете имеет вид

$$A_1 = \alpha_0, \quad A_2 = (\alpha_0 u_1^2 + 2\beta_0 u_1 + \gamma_0) \exp -u_3, \quad A_3 = -(\alpha_0 u_1 + \beta_0). \quad (4.128)$$

Для группы $G_3(VIII)$ функции ξ_2^α , ξ_3^α и их производные имеют вид

$$\begin{cases} \xi_2^\alpha = \delta_1^\alpha \cos u_2 + (\delta_3^\alpha - \delta_2^\alpha \cos u_1) \frac{\sin u_2}{\sin u_1}, & \xi_3^\alpha = \frac{\partial \xi_2^\alpha}{\partial u_2}, \\ \xi_{2,i}^\alpha = \sin u_2 (-\delta_{i2} \delta_1^\alpha + \frac{\delta_{i1}}{\sin^2 u_1} (\delta_2^\alpha - \delta_3^\alpha \cos u_1)) + (\delta_3^\alpha - \delta_2^\alpha \cos u_1) \delta_{i2} \frac{\cos u_2}{\sin u_1}. \end{cases} \quad (4.129)$$

Так как $F_{ij,2} = 0$, система распадается на две подсистемы

$$\begin{cases} F_{i\alpha,1} \sin u_1 + \delta_{2i} (F_{3\alpha} - F_{2\alpha} \cos u_1) - \delta_{2\alpha} (F_{3i} - F_{2i} \cos u_1) = 0, \\ F_{i\alpha,3} \sin u_1 + (\delta_{2\alpha} F_{1i} - \delta_{2i} F_{1\alpha}) \sin^2 u_1 + \delta_{1i} (F_{2\alpha} - F_{3\alpha} \cos u_1) - \delta_{1\alpha} (F_{2i} - F_{3i} \cos u_1) = 0. \end{cases} \quad (4.130)$$

Следовательно, используя также тождества Бьянки, получаем следующие системы уравнений

$$\begin{cases} F_{01,1} = F_{03,1} = F_{13,1} = F_{03,3} = 0, \\ F_{01,3} \sin u_1 + F_{02} - \cos u_1 F_{03} = 0, \\ F_{02,3} - F_{01} \sin u_1 = 0, \\ F_{12,3} \sin u_1 + F_{23} \cos u_1 = 0, \\ F_{13,3} \sin u_1 + F_{23} = 0; \quad F_{23,3} - F_{13} \sin u_1 = 0, \end{cases} \quad (4.131)$$

$$\begin{cases} F_{02,1} \sin u_1 - \cos u_1 F_{02} + F_{03} = 0, \\ F_{12,1} \sin u_1 - \cos u_1 F_{12} + F_{13} = 0, \\ F_{23,1} \sin u_1 - F_{23} \cos u_1 = 0, \end{cases} \quad (4.132)$$

$$\begin{cases} F_{12,3} + F_{23,1} = 0; \\ F_{12,0} = F_{02,1}; \quad F_{01,3} + F_{13,0} = 0; \\ F_{02,3} + F_{23,0} = 0. \end{cases} \quad (4.133)$$

Из системы получим

$$F_{13} = a_1 \sin u_3 + b_1 \cos u_3, \quad F_{23} = -\sin u_1 (a_1 \cos u_3 - b_1 \sin u_3), \quad (4.134)$$

$$F_{12} = \cos u_1 (a_1 \sin u_3 + b_1 \cos u_3) + c_1, \quad (4.135)$$

где a_1, b_1, c_1 функции переменных u_0, u_1 .

Используя тождества и уравнения покоя системы, получим

$$a_1 = \alpha_0 \quad b_1 = \beta_0, \quad c_1 = 0. \quad (4.136)$$

Окончательное решение может быть представлено в виде

$$\begin{cases} F_{01} = \dot{\gamma}_0 + (\dot{\alpha}_0 \cos u_3 - \dot{\beta}_0 \sin u_3), \\ F_{02} = (\dot{\alpha}_0 \sin u_3 + \dot{\beta}_0 \cos u_3) \sin u_1, \\ F_{03} = 0, F_{12} = (\alpha_0 \sin u_3 + \beta_0 \cos u_3) \cos u_1, \\ F_{13} = \alpha_0 \sin u_3 + \beta_0 \cos u_3, \\ F_{23} = (-\alpha_0 \cos u_3 + \beta_0 \sin u_3) \sin u_1. \end{cases} \quad (4.137)$$

Конкретное решение системы в выбранном измерителе имеет вид

$$A_3 = 0, \quad A_1 = \gamma_0 + (\alpha_0 \cos u_3 - \beta_0 \sin u_3), \quad A_2 = (\alpha_0 \sin u_3 + \beta_0 \cos u_3) \sin u_1. \quad (4.138)$$

4.2.3.1 Группы G_3 , действующие транзитивно на V_2

Если группа G_3 действует транзитивно на подпространстве V_2 , то она является максимальной группой для V_2 и поэтому имеет постоянную кривизну.

А. Группы $G_3(VI)$, $G_3(VII)$

Метрика

$$ds^2 = a(u^0, u^3) [(du^1)^2 + e(du^2)^2] + b(u^0, u^3) [(du^2)^2 + e_0(du^3)^2], \quad e^2 = e_0^2 = 0. \quad (4.139)$$

Операторы группы

$$\hat{Y}_1 = \hat{p}_1, \quad \hat{Y}_2 = \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_3 = u^1 \hat{p}_2 - e u^2 \hat{p}_1, \quad (4.140)$$

В. Группы $G_3(IX)$, действующая транзитивно на V_2 [228, 229]

1. Метрика

$$ds^2 = a(u^0, u^3) [(du^1)^2 + e \cos^2 u^1 (du^2)^2] + b(u^0, u^3) [(du^2)^2 + e_0 (du^3)^2], \quad e^2 = e_0^2 = 1. \quad (4.141)$$

Операторы группы

$$a) \quad e = 1, \quad \hat{Y}_1 = \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_2 = \cos u^2 \hat{p}_1 + \cos u^1 \frac{\sin u_2}{\sin u_1} \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_3 = -\partial_2 \hat{X}_2, \quad (4.142)$$

$$b) \quad e = -1, \quad \hat{Y}_1 = \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_2 = chu^2 \hat{p}_1 + \cos u^1 \frac{shu_2}{\sin u_1} \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_3 = \partial_2 \hat{X}_2. \quad (4.143)$$

2. Метрика

$$ds^2 = a(u^0, u^3) [(du^1)^2 + eu^1 (du^2)^2] + b(u^0, u^3) [(du^2)^2 + e_0 (du^3)^2] \quad e^2 = e_0^2 = 1. \quad (4.144)$$

Операторы группы

$$a) \quad e = -1, \quad \hat{Y}_1 = \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_2 = \cos u^2 \hat{p}_1 - shu^1 \frac{\sin u_2}{chu_1} \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_3 = -\partial_2 \hat{X}_2, \quad (4.145)$$

$$b) \quad e = 1, \quad \hat{Y}_1 = \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_2 = chu^2 \hat{p}_1 - shu^1 \frac{shu_2}{chu_1} \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_3 = \partial_2 \hat{X}_2. \quad (4.146)$$

Найдём потенциалы допустимых электромагнитных полей. Рассмотрим группу с операторами. Из системы уравнений получим

$$A_{i,1} = A_{i,2} = 0. \quad (4.147)$$

С учётом этого, из оставшихся уравнений системы следует

$$\delta_{i1} A_2 - \delta_{i2} A_1 = 0. \quad (4.148)$$

Таким образом, потенциал допустимого электромагнитного поля имеет вид

$$A_0 = A_1 = A_2 = 0, \quad A_3 = \alpha(u^0, u^3). \quad (4.149)$$

Проводя аналогичные расчёты для остальных наборов операторов группы, убеждаемся, что во всех этих вариантах потенциал допустимого электромагнитного поля имеет один и тот же вид.

Существует только одна трёхпараметрическая группа движений, действующая на изотропном двухмерном подпространстве пространственно-временного многообразия $G_3(II)$. Метрика пространства и операторы этой группы имеют вид

$$ds^2 = a(u^0, u^3) [(du^2)^2 + 2du^1 du^2] + b(u^0, u^3) (du^3)^2 + e(du^0)^2, \quad e^2 = 0, \quad (4.150)$$

$$\hat{Y}_1 = \hat{p}_1, \quad \hat{Y}_2 = \hat{p}_2, \quad \hat{Y}_3 = u^2 \hat{p}_1 - u^3 \hat{p}_2. \quad (4.151)$$

Допустимые электромагнитные поля запишутся в виде $A_{i,1} = A_{i,2} = 0, A_1 \delta_{2i} = A_2 \delta_{3i}$.

Таким образом, и в этом случае окончательное решение имеет вид

$$A_0 = A_1 = A_2 = 0, A_3 = \alpha(u^0, u^3). \quad (4.152)$$

Выводы по четвертому разделу

Подобрана калибровка потенциала A_p путем градиентного преобразования потенциала. Рассмотрены структуры двух-параметрических и трёх-параметрических групп. Используя следствия из уравнений Киллинга, получены необходимые и достаточные условия существования алгебры операторов симметрии уравнения Клейн-Гордона-Фока. Исследованы условия совместности для нахождения допустимых электромагнитных полей. Определено множество допустимых электромагнитных полей, в которых интегралы движения задаются группой G_r .

Найдены электромагнитные поля, в которых уравнение Клейн-Гордона-Фока для заряженной пробной частицы допускает операторы симметрии первого порядка при условии, что группы движений пространственно-временного многообразия $G_3, r \leq 3$, действуют транзитивно на двухмерном подпространстве V_2 . Рассмотрены метрики пространственно-временных многообразий, в которых действуют группы $G_3(N)$.

Рассмотренные метрики могут найти применение в космологии, особенно при изучении процессов, происходящих на ранних этапах эволюции Вселенной и при построении моделей взаимодействия аксионного поля с электромагнитным, что представляет интерес при изучении проблемы тёмной материи, изучаемые в работах [230-232].

Результаты можно использовать при получении точных самосогласованных решений в Общей теории относительности, в скалярно-тензорной теории гравитации, в проблеме Вайдья, а также при интегрировании полевых уравнений в других гравитационных теориях, изучаемые в работах [233, 234].

Результаты могут быть использованы при построении теории некоммутативного интегрирования квантовых уравнений движения в сильном гравитационном поле в присутствии полей калибровочной природы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована модель Вселенной темной энергии, основанная на логарифмически скорректированном степенном модифицированном уравнении состояния, при наличии объемной вязкости, в однородном и изотропном пространственно–плоском пространство-время ФЛРУ. Рассмотрено взаимодействие с ТМ и получены аналитические выражения для плотности энергии обеих жидкостей. Выделены режимы разного поведения: либо расширение с ускорением (как настоящее время), либо расширение с замедлением. Показано, что в отличие от невязкой логарифмически скорректированной степенной жидкости без взаимодействия с темной материей, модель более подходит для описания нынешней Вселенной. С использованием двухкомпонентной вязкой жидкости в пространственно-плоском пространстве-времени ФЛРУ изучена Вселенная позднего времени. С этой целью использовано логарифмически скорректированное степенное уравнение состояния в сочетании с ТМ. Виды взаимодействия между компонентами вязкой жидкости определены в виде $Q = 3\lambda H(\rho + \rho_1) + \gamma(\dot{\rho} + \dot{\rho}_1)$ и $Q = 3\alpha H \frac{\rho\rho_1}{(\rho + \rho_1)}$. На

основе того, что вторая производная от масштабного фактора положительна и в более поздние времена, когда $t \rightarrow \infty$, получаено $\rho_1(t) \rightarrow 0$, показана динамика ускоряющегося расширения Вселенной.

Используя БМО, устранена напряженность постоянной Хаббла H_0 . С помощью БМО продемонстрировано, что существует отклонение от парадигмы холодной темной материи в космологических масштабах, что может эффективно решить проблему напряженности постоянной Хаббла H_0 . Рассмотрены три реалистичные модели $f(T)$ гравитации, появившиеся в литературе, с двумя параметрами, из которых один является независимым. Используются доступные в настоящее время данные наблюдений Хаббла. Использовано БМО для ограничения космологических моделей, основанных на $f(T)$ гравитации. Рассмотрены и изучены ограничения на степенные, экспоненциальные и экспоненциальные $f(T)$ модели с квадратным корнем, используя SLTD в качестве основного элемента процесса генерации и ключевого компонента вероятностного подхода МО. Получены очень жесткие ограничения на параметры, определяющие $f(T)$ модели.

Найдена классификация всех допустимых внешних электромагнитных полей, как для операторов симметрии из полного набора, обеспечивающего полное разделение переменных, так и для операторов группы. Найдены электромагнитные поля, в которых уравнение Клейн-Гордона-Фока для заряженной пробной частицы допускает операторы симметрии первого порядка при условии, что группы движений пространственно-временного многообразия G_3 , $r \leq 3$, действуют транзитивно на двухмерном подпространстве V_2 . Рассмотрены метрики пространственно-временных многообразий, в которых действуют группы $G_3(N)$. Рассмотренные метрики могут найти применение в

космологии, особенно при изучении процессов, происходящих на ранних этапах эволюции Вселенной и при построении моделей взаимодействия аксионного поля с электромагнитным.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Вейль Г. Симметрия / пер. с англ. – М.: Наука, 1968. – 192 с.
- 2 LiB., Sotiriou T.P., Barrow J.D. $f(T)$ gravity and local Lorentz invariance // Physical Review D. – 2011. – Vol. 83, №6. – P. 064035-1-064035-5.
- 3 Brading K. and Castellani E. Symmetry in Physics: Philosophical Reflections // https://www.researchgate.net/publication/2189581_Symmetries. 15.08.2022.
- 4 Belot G. The representation of time and change in mechanics. // In book: Philosophy of Physics. – North-Holland, 2006. – P. 133-227.
- 5 Basilakos S., Tsamparlis M., Paliathanasis A. Using the Noether symmetry approach to probe the nature of dark energy // Physical Review D. – 2011. – Vol. 83, №10. – P. 103512-1-103512-14.
- 6 De Souza R.C., Kremer G.M. Noether symmetry for non-minimally coupled fermion fields // Classical and Quantum Gravity. – 2008. – Vol. 25, №22. – P. 225006-1-225006-10.
- 7 Souza R.C., Kremer G.M. Constraining non-minimally coupled tachyon fields by the Noether symmetry // Classical and Quantum Gravity. – 2009. – Vol. 26. – P. 135008-1-135008-14.
- 8 Jamil M., Mahomed F.M., Momeni D. Noether symmetry approach in $f(R)$ -tachyon model // Physics Letters B. – 2011. – Vol. 702. – P. 315-319.
- 9 Zhang Y., Gong Y.G., Zhu Z.H. The Noether symmetry approach in a 'cosmic triad' vector field scenario // Classical and Quantum Gravity. – 2010. – Vol. 27, №13. – P. 135019-1-135019-17.
- 10 Capozziello S., de Ritis R., Scudellaro P. Nöther's symmetries in (n+1)-dimensional nonminimally coupled cosmologies // International Journal of Modern Physics D. – 1993. – Vol. 2. – P. 463-476.
- 11 Capozziello S., de Ritis R. Nöther's symmetries and exact solutions in flat non-minimally coupled cosmological models // Classical and Quantum Gravity. – 1994. – Vol. 11. – P. 107-1-107-20.
- 12 Noether E. Invariant Variation Problems/Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen // Mathematisch-Physikalische Klasse. – 1918. – Vol. 23. – P. 235-257.
- 13 De Ritis R., Rubano C., Scudellaro P. Einstein Equations and Alternative Lagrangians // Europhysics Letters. – 1995. – Vol. 32. – P. 185-195.
- 14 Veneziano G. Inhomogeneous pre-Big Bang string cosmology // Physics Letters B. – 1997. – Vol. 406, №4. – P. 297-303.
- 15 Biswas A.K., Maharana J., Pradhan R.K. The holography hypothesis and pre-big bang cosmology // Physics Letters B. – 1997. – Vol. 462, №3-4. – P. 243-248.
- 16 Chiba T. Numerical study of inhomogeneous Pre-Big-Bang inflationary cosmology // Physical Review D. – 1999. – Vol. 59. – P. 083508-1-083508-27.
- 17 Guth A.H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems // Physical Review D. – 1981. – Vol. 23. – P. 347-356.
- 18 Sato K. First-order phase transition of a vacuum and the expansion of the Universe // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1981. – Vol. 195. – P. 467-479.

- 19 Nojiri S., Odintsov S.D. Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2007. – Vol. 04. – P. 115-1-115-22.
- 20 AdeP., AghanimR., Arnaud M. et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters // Astron. Astrophys. – 2016. –Vol.594, №13. –P. 1-67.
- 21 BennettC. L., LarsonD., Weiland J. et al. Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results // Astrophys. J. Suppl. – 2013. – Vol. 208. – P. 20-1-20-177.
- 22 Alexandre J., Houston N., Mavromatos N.E. Starobinsky-type inflation in dynamical supergravity breaking scenarios // Physical Review D. – 2014. – Vol. 89, №2. – P. 027703.
- 23 Starobinsky A.A. A new type of isotropic cosmological models without singularity // Physics Letters B. – 1980. – Vol.91. – P. 99-102.
- 24 Buchbinder I.L., Odintsov S.D., Shapiro I.L. Effective action in quantum gravity. –NY.; London:Taylor & Francis Croup, 1992. – 461 p.
- 25 Mukhanov V., Winitzki S. Introduction to quantum effects in gravity.– Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2007. –273 p.
- 26 Cai Y-F Capozziello S., De Laurentis M., Saridakis E.N. $f(T)$ teleparallel gravity and cosmology // Reports on Progress in Physics. – 2016. – Vol. 79. – P. 106901-1-106901-136.
- 27 De Andrade V.C., Guillen L.C.T., Pereira J.G. Teleparallel Gravity: An Overview // <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0011087v1>. 10.05.2022.
- 28 Mamaev S.G., Mostepanenko V.M. Isotropic cosmological models determined by vacuum quantum effects // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1980. – Vol. 51. – P. 9-13.
- 29 Buchdahl H.A. Non-linear Lagrangians and cosmological theory // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1970. – Vol. 150. – P. 1-8.
- 30 Myrzakulov R. FRW cosmology in $F(R, T)$ gravity // The European Physical Journal C. – 2012. – Vol. 72, №11.– P. 1-9
- 31 Ellis G.F.R. Cosmology: MathematicalAspects // Encyclopedia of Mathematical Physics.–2006. –Vol.3324. –P. 653-658.
- 32 Myrzakulov R. Accelerating universe from $F(T)$ gravity // The European Physical Journal C. – 2011. – Vol.71. – P. 1752.
- 33 De Felice A., Tsujikawa S. $f(R)$ Theories // Living Reviews in Relativity. – 2010. – Vol. 13, №3. – P. 012-1-012-156.
- 34 Leblond L., Shandera S. Cosmology of the tachyon in brane inflation // Journal ofCosmology and Astroparticle Physics. – 2007. – Vol. 2007, №01. – P. 009-1-009-31.
- 35 Balantekin A.B., Fuller G.M. Neutrinos in cosmology and astrophysics // Progress in Particle and Nuclear Physics. – 2013. – Vol. 71. – P. 162-166.
- 36 Brookfield A.W., van de Bruck C., Mota D.F. et al. Cosmology with Massive Neutrinos Coupled to Dark Energy // Physical Review Letters. – 2006. – Vol. 96. – P. 061301.
- 37 Bamba K., Odintsov S.D., Saez-Gomez D. Conformal symmetry and

accelerating cosmology in teleparallel gravity // *Physical Review D*. – 2013. – Vol. 88. – P. 084042

38 Arroja F., Sasaki M. Strong scale dependent bispectrum in the Starobinsky model of inflation // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. – 2012. – Vol. 2012, №8. – P. 012-1-012-14.

39 Jamil M., Momeni D. et al. Resolution of dark matter problem in $f(T)$ gravity // *The European Physical Journal C*. – 2012. – Vol. 72. – P. 2122-1-2122-14.

40 Momeni D., Gholizade H. A note on constant curvature solutions in cylindrically symmetric metric $f(R)$ Gravity // *International Journal of Modern Physics D*. – 2009. – Vol. 18. – P. 1719-1-1719-13.

41 Linder E.V. Einstein's other gravity and the acceleration of the Universe // *Physical Review D*. – 2010. – Vol. 81. – P. 127301-1-127301-7.

42 Ferraro R., Fiorini F. Born-Infeld gravity in Weitzenböck spacetime // *Physical Review D*. – 2008. – Vol. 78, №12. – P. 124019-1-124019-8.

43 Wu Y.-P., Geng C.-Q. Matter density perturbations in modified teleparallel theories // *Journal of High Energy Physics*. – 2012. – Vol. 1211. – P. 142.

44 Xu C., Saridakis E.N., Leon G. Phase-space analysis of teleparallel dark energy // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. – 2012. – Vol. 07. – P. 005.

45 Basilakos S., Capozziello S., De Laurentis M. et al. Noether symmetries and analytical solutions in $f(T)$ cosmology: A complete study // *Physical Review D*. – 2013. – Vol. 88. – P. 103526.

46 Kazanas D. Dynamics of the universe and spontaneous symmetry breaking // *Astrophysical Journal*. – 1980. – Vol. 241. – P. 59-63.

47 Hehl F.W., McCrea J.D., Mielke E.W. et al. Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance // *Physics Reports*. – 1995. – Vol. 258, №1. – P. 1-171.

48 Poplawski N.J. Geometrization of electromagnetism in tetrad-spin-connection gravity // *Modern Physics Letters A*. – 2009. – Vol. 24. – P. 431-442.

49 Chiba T., Okabe T., Yamaguchi M. Kinetically driven quintessence // *Phys. Rev. D*. – 2000. – Vol. 62. – P. 3511-1-3511-19.

50 R De Putter R., Linder E.V. Kinetic k -essence and quintessence // *Astroparticle Physics*. – 2007. – Vol. 28. – P. 263-272.

51 Wang J., Cui S.-W., Zhang C.-M. Thermodynamics of Spinor Quintom // *Phys. Lett. B*. – 2010. – Vol. 683. – P. 101-107.

52 Ribas M.O., Devecchi F.P., Kremer G.M. Cosmological model with non-minimally coupled fermionic field // *Europhys. Lett.* – 2008. – Vol. 81. – P. 518-519.

53 Razina O., Tsyba P., Meirbekov B. et al. Cosmological Einstein-Maxwell model with g -essence // *International Journal of Modern Physics D*. – 2019. – Vol. 28, №10. – P. 1950126.

54 Perlmutter S., Aldering G., Goldhaber G. et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae // *The Astrophysical Journal*. – 1999. – Vol. 517, №2. – P. 565-586.

55 Riess A.G., Alexei V.P. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant // *Astron. J.* – 1998. – Vol. 116. – P.

1009-1038.

56 Eisenstein D.J., Zehavi I., Hogg D.W. et al. Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies. // *The Astrophysical Journal*. – 2005. –Vol. 633,№2. –P. 560-574.

57 Tegmark M., Strauss M.A., Blanton M.R. et al. Cosmological parameters from SDSS and WMAP // *Physical Review D*. – 2004. –Vol. 69. –P. 103501.

58 Seljak U., Makarov A., McDonald P. et al. Cosmological parameter analysis including SDSS Ly α forest and galaxy bias: Constraints on the primordial spectrum of fluctuations, neutrino mass, and dark energy // *Physical Review D*. – 2005. –Vol. 71. –P. 103515.

59 Spergel D.N., Bean R., Doré O. et al. Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results: Implications for Cosmology // *Astrophys. J. Suppl.* – 2007. –Vol.170. –P. 377-1-377-91.

60 Komatsu E., Smith K.M., Dunkley J. et al. Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe(wmap) observations: cosmological interpretation // *The Astrophysical Journal Supplement Series*. – 2011. –Vol.192. –P. 18-65.

61 Jain B., Taylor A. Cross-Correlation Tomography: Measuring Dark Energy Evolution with Weak Lensing // *Physical Review Letters*. – 2003. – Vol. 91,№14. –P. 141302.

62 Hubble E. A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. – 1929. –Vol. 15. – P. 168-173.

63 Riess A.G., Casertano S., Yuan W. et al. Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond Λ CDM // *The Astrophysical Journal*. – 2019. – Vol.876. –P. 85-98.

64 Lilley M., Lilje P.B., Liguori M. et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters // *Cosmology and Nongalactic Astrophysics*. – 2018. –Vol. 73. –P. 59-1-59-73.

65 Riess A.G. et al. Milky Way Cepheid Standards for Measuring Cosmic Distances and Application to Gaia DR2: Implications for the Hubble Constant // *The Astrophysical Journal*. – 2018. – Vol.861,№2. –P. 126-1-126-13.

66 De Jaeger T., Galbany L. et al. Studying Type II supernovae as cosmological standard candles using the Dark Energy Survey. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2020. –Vol. 495,№4. –P. 4860-4892.

67 Abbott T.M.C., Aguena M., Alarcon A. et al. Dark Energy Survey Year 1 Results: Cosmological constraints from cluster abundances and weak lensing // *Physical Review D*. – 2020. –Vol. 102,№2. –P. 023509-1-023509-35.

68 Aljaf M., Gregoris D., Khurshudyan M. Phase space analysis and singularity classification for linearly interacting dark energy models // *The European Physical Journal C*. – 2020. –Vol.80,№2. –P. 112-1-112-23.

69 Sadri E., Khurshudyan M. et al. Scrutinizing various phenomenological interactions in the context of holographic Ricci dark energy models // *Eur. Phys. J. C*. – 2020. –Vol. 80. –P. 393-1-393-22.

- 70 Perlmutter S., Aldering G., Goldhaber G. et al. Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae // *The Astrophysical Journal*. – 1999.– Vol.517,№2.–P. 565-586.
- 71 Spergel D.N. et al. Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology // *Astrophys. J. Suppl.* -2007. – Vol.170. –P. 377-1-377-91.
- 72 Pan S., Chakraborty S. A cosmographic analysis of holographic dark energy models // *Int. J. Mod. Phys. D*. – 2014. –Vol.23. –P. 14500921-14500921-14.
- 73 Caldwell R.R., Dave R., Steinhardt P.J. Cosmological imprint of an energy component with general equation of state // *Phys. Rev. Lett.* – 1998. –Vol.80. –P. 1582.
- 74 Armendariz-Picon C., Mukhanov V., Steinhardt P.J. Essentials of k essence // *Phys. Rev. D*. – 2001. –Vol.63. –P. 103510.
- 75 Padmanabhan T. Accelerated expansion of the universe driven by tachyonic matter // *Phys. Rev. D*. – 2002. –Vol.66. –P. 021301.
- 76 Sen A. Remarks on tachyon driven cosmology // *Physica Scripta*. – 2005. – Vol. 117. –P. 70-1-70-16.
- 77 Caldwell R.R. A phantom menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state // *Phys. Lett. B*. – 2002. –Vol. 545. –P. 23-1-23-17.
- 78 Caldwell R.R., Kamionkowski M., Weinberg N.N. Phantom energy and cosmic doomsday // *Phys. Rev. Lett.* – 2003. –Vol.91. –P. 071301-1-071301-4.
- 79 Sami M., Toporensky A. Phantom field and the fate of universe // *Mod. Phys. Lett. A*. – 2004. –Vol. 19. –P. 1509-1-1509-5.
- 80 Elizalde E., Nojiri S., Odintsov S.D. Late-time cosmology in a (phantom) scalar-tensor theory: Dark energy and the cosmic speed-up // *Phys. Rev. D*. – 2004. – Vol.70. –P. 043539.
- 81 Kamenshchik A., Moschella U., Pasquier V. An Alternative to quintessence // *Phys. Lett. B*. – 2001. –Vol.511. –P. 265-1-265-8.
- 82 Bertolami O., Sen A.A. Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion and dark energy matter unification // *Phys. Rev. D*. – 2002. –Vol.66. –P. 043507.
- 83 Cohen A.G., Kaplan D.B., Nelson A. E. Effective field theory, black holes, and the cosmological constant // *Phys. Rev. Lett.* – 1999. –Vol.82. –P. 4971.
- 84 Wetterich C. The cosmological model for an asymptotically vanishing time-dependent cosmological constant // *Astron. Astrophys.* – 1995. –Vol.301. –P. 321-1-321-19.
- 85 Riess A.G. et al. New Hubble Space Telescope Discoveries of Type Ia Supernovae at $z > 1$: Narrowing Constraints on the Early Behavior of Dark Energy // *Astrophysical Journal*. – 2007. –Vol.656. –P. 1-83.
- 86 Padmanabhan T. Cosmological constant – the weight of the vacuum // *Physics Reports*. – 2003. –Vol.380. –P. 235-320.
- 87 Peebles P.J.E., Ratra B. The cosmological constant and dark energy // *Rev. Mod. Phys.* -2003. –Vol. 75. –P. 559-606.
- 88 Sahni V. Dark Matter and Dark Energy // *Lect. Notes Phys.* – 2004. – Vol. 653. –P. 141-1-141-40.

- 89 Pavon D., Zimdahl W. Holographic dark energy and cosmic coincidence // Phys. Lett. B. – 2005. –Vol. 628. –P. 206-210.
- 90 CampoS., HerreraR., Olivares G. et al. Interacting models of soft coincidence // Phys. Rev. D. – 2006. –Vol.74. –P. 023501.
- 91 CampoS., Herrera R., PavonD. Soft coincidence in late acceleration // Phys. Rev. D. – 2005. –Vol.71. –P. 123529.
- 92 OlivaresG., Atrio-Barandela F., PavonD. Observational constraints on interacting quintessence models // Phys. Rev. D. – 2005. –Vol.71. –P. 063523.
- 93 AmendolaL. Coupled quintessence // Phys. Rev. D. – 2000. –Vol.62. –P. 043511.
- 94 Amendola L., QuercelliniC. Tracking and coupled dark energy as seen by the Wilkinson Microwave Anisotropy Probe // Phys. Rev. D. – 2003. –Vol.68. –P. 023514.
- 95 Amendola L., Tsujikawa S., Sami M. Phantom damping of matter perturbations // Phys. Lett. B. – 2006. –Vol. 632. –P. 155-1-155-4.
- 96 Olivares G., Atrio-Barandela F., Pavon D. Matter density perturbations in interacting quintessence models // Phys. Rev. D. – 2006. –Vol.74. –P. 043521.
- 97 Wang B., Gong Y.G., Abdalla E. Transition of the Dark Energy Equation of State in an Interacting Holographic Dark Energy Model // Physics Letters. B. – 2005. –Vol.624. –P. 141-1-141-11.
- 98 Wang B., Lin C.-Y., Abdalla E. Constraints on the interacting holographic dark energy model // Phys. Lett. B. – 2006. –Vol.637. –P. 357-361.
- 99 Wang B., ZangJ., LinC.-Y. et al. Interacting dark energy and dark matter: Observational constraints from cosmological parameters // Nucl. Phys. B. – 2007. –Vol.778. –P. 69-84.
- 100 Zimdahl W. Int. Interacting dark energy and cosmological equations of state // International Journal of Modern Physics D. – 2005. –Vol.14. –P. 2319-2325.
- 101 Abdalla E., WangB. The mass and the coupling of the dark particle // Phys. Lett. B. – 2007. –Vol.651. –P. 89-91.
- 102 Feng C., Wang B., Gong Y.G. et al. Testing the viability of the interacting holographic dark energy model by using combined observational constraints // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2007. –Vol.2007, №09. –P. 005-1-005-15.
- 103 Guo Z.K., Ohta N., Tsujikawa S. Probing the coupling between dark components of the universe // Phys. Rev. D. – 2007. –Vol.76. –P. 023508.
- 104 Bertolami O., Gil Pedro F., Le Delliou M. Dark energy–dark matter interaction and putative violation of the equivalence principle from the Abell cluster A586 // Phys. Lett. B. – 2007. –Vol.654. –P. 165-169.
- 105 BertolamiO., Gil Pedro F., Le Delliou M. The Abell Cluster A586 and the Equivalence Principle // General Relativity and Gravitation. – 2009. –Vol. 41. –P. 2839-2846.
- 106 Kesden M., KamionkowskiM. Galilean Equivalence for Galactic Dark Matter // Phys. Rev. Lett. – 2006. –Vol.97. –P. 131303.
- 107 Kesden M., KamionkowskiM. Tidal tails test the equivalence principle in the dark-matter sector // Phys. Rev. D. – 2006. –Vol.74. –P. 083007.
- 108 Amendola L., Tocchini-ValentiniD. Stationary dark energy: The present

- universe as a global attractor // *Phys. Rev. D.* – 2001. – Vol.64. – P. 043509.
- 109 Anderson G.W., Carroll S.M. Dark Matter with Time-Dependent Mass // *COSMO-97.* – 1998. – Vol.604. – P. 227-229.
- 110 Das S., Corasaniti P.S., Khoury J. Superacceleration as the signature of a dark sector interaction // *Phys. Rev. D.* – 2006. – Vol.73. – P. 083509.
- 111 Zimdahl W., Pavjåon D., Chimento L.P. Interacting quintessence // *Phys. Lett. B.* – 2001. – Vol.521. – P. 133-138.
- 112 Chimento L.P., Jakubi A.S., Pavjåon D. et al. Interacting quintessence solution to the coincidence problem // *Phys. Rev. D.* – 2003. – Vol. 67. – P. 083513.
- 113 del Campo S., Herrera R., Pavon D. Late universe expansion dominated by domain walls and dissipative dark matter // *Phys. Rev. D.* – 2004. – Vol.70. – P. 043540.
- 114 Mangano G., Miele G., Pettorino V. Coupled quintessence and the coincidence problem // *Modern Physics Letters.* – 2003. – Vol. 18. – P. 831-842.
- 115 Lin.C.-Y, Abdalla E. Thermodynamical interpretation of the interacting holographic dark energy model in a non-flat universe // *Physics Letters.* – 2008. – Vol.B666. – P. 111-115.
- 116 Pavon D, Wang.B. Le Chatelier-Braun principle in cosmological physics // *General Relativity Gravity.* – 2009. – Vol.41. – P. 1-5.
- 117 Weinberg S. The cosmological constant problem // *Review Modern Physics.* – 1989. – Vol. 61, №1. – P. 1-23.
- 118 Padmanabhan T, Cosmological Constant - the Weight of the Vacuum // *Physics Reports.* – 2003. – Vol.380. – P.235-320.
- 119 Steinhardt P. Quintessential Introduction to Dark Energy // *The Royal Society.* – 2003. – Vol.361. – P. 2497-2513.
- 120 Amendola L, Tsujikawa S. *Dark Energy: theory and observations.* – m Cambridge: Cambridge University Press, 2010. – 491 p.
- 121 Wang B., Abdalla E., Barandela F.A. et al. Dark Matter and Dark Energy Interactions: Theoretical Challenges, Cosmological Implications and Observational Signatures // *Reports on Progress in Physics.* – 2016. – Vol.79. – P. 1-98.
- 122 Salvatelli V. et al. Indications of a late-time interaction in the dark sector // *Physics. Review Letters.* – 2014. – Vol. 113. – P. 181301-1-181301-6.
- 123 Sola J. et al. Relaxing the σ_8 -tension through running vacuum in the Universe // *Europhysics Letters.* – 2017. – Vol. 120, №3. – P. 39001-1-39001-7.
- 124 Caprini C., Tamanini N. Constraining early and interacting dark energy with gravitational wave standard sirens: the potential of the eLISA mission // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics.* – 2016. – Vol. 10. – P. 1-26.
- 125 Murgia R., Gariazzo S., Fornengo N. Constraints on the Coupling between Dark Energy and Dark Matter from CMB data // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics.* – 2016. – Vol. 14. – P. 1-21.
- 126 Pourtsidou A., Tram T. Reconciling CMB and structure growth measurements with dark energy interactions // *Physics Review.* – 2016. – Vol. 94. – P. 043518-1-043518-10.
- 127 Wang B., Zang J., Lin C.-Y. et al. Bouncing universe with Quintom matter // *Journal of High Energy Physics.* – 2007. – Vol. 071. – P. 1-7.

- 128 Elizalde E., Khurshudyan M. Constraints on Cosmic Opacity from Bayesian Machine Learning: The hidden side of the H_0 tension problem // *Cosmology and Nongalactic Astrophysics* – 2020. – Vol. 37. – P. 1-13.
- 129 Di Valentino E., Melchiorri A. Nonminimal dark sector physics and cosmological tensions // *Physics Review D*. – 2020. – Vol. 101. – P. 063502.
- 130 Mishra B., Ray P.P., Myrzakulov R. Bulk viscous embedded hybrid dark energy models // *European Physical Journal C*. – 2019. – Vol. 79. – P. 34-1-34-8.
- 131 de Bernardis P. et al. A flat Universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation // *Nature*. – 2000. – Vol. 404. – P. 955-1-955-20.
- 132 Green S.R., Simpson Ch. Gravitational-wave parameter estimation with autoregressive neural network flows // *Physical Review D*. – 2020. Vol. 102. – P. 104057-1-104057-16.
- 133 Perlmutter S. et al. Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae // *The Astrophysical Journal*. – 1999. Vol. 517, №2. – P. 1-21.
- 134 Odintsov S.D. et al. Testing the equation of state for viscous dark energy // *Physical Review D*. – 2020. – Vol. 101. – P. 044010.
- 135 Troxel M.A. et al. Dark Energy Survey Year 1 results: Cosmological constraints from cosmic shear // *Physical Review D*. – 2018. – Vol. 98. – P. 043528.
- 136 Stackel P. Über die Integration der Hamiltonschen differentialechung mittels separation der variablen // *Mathematische Annalen*. – 1897. – Vol. 49. – P. 145-147.
- 137 Levi-Civita T. Sulla Integrazione Della Equazione Di Hamilton-Jacobi Per Separazione Di Variabili // *Mathematische Annalen*. – 1904. – Vol. 59. – P. 383-397.
- 138 Jarov-Jrovoy M.S. Integration of Hamilton-Jacobi equation by complete separation of variables method // *Journal of Applied Mathematics*. – 1963. – Vol. 27. – P. 173-219.
- 139 Shapovalov V.N. Symmetry and separation of variables in the Hamilton-Jacobi equation // *Soviet Physics Journal*. – 1978. – Vol. 21. – P. 1124-1132.
- 140 Bagrov V.G., Obukhov V.V. Complete separation of variables in the free Hamilton-Jacobi equation // *Theoretical and Mathematical Physics*. – 1993. – Vol. 97. – P. 1275-1289.
- 141 Miller W. *Symmetry And Separation of Variables*. – Cambridge: Cambridge University Press: 1984. – 328 p.
- 142 Obukhov V.V. Hamilton-Jacobi equation for a charged test particle in the Stackel space of type (2.1) // *Symmetry*. – 2020. Vol. 17. – P. 1289-1-1289-15.
- 143 Obukhov V.V. Integration of the Hamilton-Jacobi and Maxwell equations for Diagonal metrics // *Russian Physics Journal*. – 2020. – Vol. 63, №7. – P. 33-35.
- 144 Bagrov V.G., Obukhov V.V. Separation of variables for the Klein-Gordon equation in special stackel space-times // *Classical and Quantum Gravity*. – 1990. – Vol. 7. – P. 19-25.
- 145 Bagrov V.G., Obukhov V.V., Shapovalov A.V. Special Stackel electrovac spacetimes // *Pramana Journal of Physics*. – 1986. – Vol. 26. – P. 93-108.
- 146 Osetrin K.E., Filippov A.E., Osetrin E.R. The spacetime models with dust

matter that admit separation of variables in HamiltonJacobi equations of a test particle // Modern Physics Letters A. – 2016. – Vol. 31, №6. – P. 1-14.

147 Osetrin K, Osetrin E. Shapovalov wave-like spacetimes // Symmetry. – 2020. Vol. 12. P.1372

148 Maharaj S.D, Goswami R, Chervon S.V, Nikolaev A.V. Exact solutions for scalar field cosmology in $f(R)$ gravity //Modern Physics Letters A. – 2017. Vol. 32

149 Gray F, Hourii T, Kubiznak D, Yasui Y. Symmetry operators for the conformal wave equation //Physics Review D. – 2021. – Vol. 104. – P. 084042.

150 Bamba K., Capozziello S., Nojiri S. et al. Dark energy cosmology: The equivalent description via different theoretical models and cosmography tests // Astrophysics and Space Science. – 2012. – Vol. 342. – P. 155-228.

151 Capozziello S., De Laurentis M., Odintsov D. Hamiltonian dynamics and Noether symmetries in extended gravity cosmology // European Physics Journal. – 2012. Vol. 72. – P. 2068.

152 Makarenko A.N., Obukhov V.V. Exact solutions in modified gravity models // Entropy. – 2012. – Vol.14. – P. 1140-1153.

153 Akdemir A.O., Butt S.I., Nadeem M. et al. New General Variants of Chebyshev Type Inequalities via Generalized Fractional Integral Operators // Mathematics.– 2021. – Vol. 9. – P. 122-1-122-10.

154 Shapovalov A.V, Shirokov I.V. Noncommutative integration method for linear partial differential equations. functional algebras and dimensional reduction //Theoretical and Mathematical Physics. – 1996. – Vol. 106.– P. 3-15.

155 Magazev A.A. Integrating Klein-Gordon-Fock equations in an extremal electromagnetic field on Lie groups //Theoretical and Mathematical Physics. – 2012. – Vol. 173. – P. 1654-1667.

156 Shapovalov A.V., Breev A.I. Symmetry operators and separation of variables in the $(2 + 1)$ -dimensional Dirac equation with external electromagnetic field // International Journal of Geometric Methods in ModernPhysics. – 2018. – Vol. 15, №5. – P. 1850085-1-1850085-25.

157 Shapovalov A.V., Breev A.I. The Dirac equation in an external electromagnetic field: Symmetry algebra and exact integration // Journal of Physics: ConferenceSeries. – 2016. – Vol. 670. – P. 012015-1-0120015-17.

158 Obukhov V.V. Exact Solutions of Maxwell Equations in Homogeneous Spaces with the Group of Motions $G_3(IX)$ // Axioms. – 2023.– Vol. 12, №2. – P. 135-1-135-11.

159 Peebles P.J.E., PatraB. An analogy between the properties of «dark energy» and physical vacuum consisting of quantum harmonic oscillators characterized by zero-point energy//Journal of Modern Physics. – 2019. – Vol.10. –P. 20-34.

160 Li M., Li X., Wang S. et al. Planetary heating by neutrinos: Long-term habitats for aquatic life if dark energy decays favourably // Journal of Modern Physics. – 2013. – Vol.4.– P. 20-47.

161 Nojiri S., Odintsov S.D. Inhomogeneous equation of state of the universe: phantom era, future singularity and crossing of the phantom barrier // Phys. Rev. D. – 2005. – Vol.72.– P. 023003.

162 Nojiri S., Odintsov S.D. The new form of the equation of state for dark energy fluid and accelerating universe // Physical Letters B. – 2006. – Vol.639. – P. 144-150.

163 Elizalde E., Nojiri S., Odintsov S.D. et al. Dark energy: Vacuum fluctuations, the effective phantom phase, and holography // Physical Review D. – 2005. – Vol.71. – P. 103504.

164 Mayer B. Ab-initio calculation of the elastic constants and thermal expansion coefficients of laves phases // Intermetallics. – 2003. – Vol.11. – P. 1-23.

165 Ivanovski A.L. Electronic structure, mechanical and dynamical stability of hexagonal subcarbides M_2C ($M = \text{Tc, Ru, Rh, Pd, Re, Os, Ir, and Pt}$): Ab-initio calculations // physica status solidi (RRL) - Rapid Research Letters. – 2018. – Vol. 57. – P.213-224.

166 Nojiri S., Odintsov S.D., Oikonomou V.K. Modified gravity theories on a nutshell: Inflation, bounce and late-time evolution // Phys. Rep. – 2017. – Vol.692. – P. 1-104.

167 Nojiri S., Odintsov S.D. Modified gravity with negative and positive powers of curvature: Unification of inflation and cosmic acceleration // Physical Review D. – 2003. – Vol.68. – P. 123512.

168 Nojiri S., Odintsov S.D. Unified cosmic history in modified gravity: from $F(R)$ theory to Lorentz non-invariant models // Phys. Rep. – 2011. – Vol. 505. – P. 59-144.

169 Chavanis P.H. Partially relativistic self-gravitating Bose-Einstein condensates with a stiff equation of state // European Physical Journal. – 2015. – Vol. 130. – P.181.

170 Chavanis P.H. The Logotropic Dark Fluid as a unification of dark matter and dark energy // Phys. Lett. B. – 2016. – Vol.758. – P.59-66.

171 Elizalde E., Gluza J., Khurshudyan M. An approach to cold dark matter deviation and the H_0 tension problem by using machine learning // https://www.researchgate.net/publication/350625914_An_approach_to. 10.08.2022.

172 Sharov G.S. A new interacting two fluid model and its consequences // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society – 2017. – Vol. 466. – P.3497-3506.

173 Chimento L. P. Linear and nonlinear interactions in the dark sector, Physics Review D. – 2009. – Vol.81. – P. 043525.

174 Chimento L.P. Exactly solved models of interacting dark matter and dark energy // AIP Conference Proceeding. – 2012. – Vol.1471. – P.30-1-30-9.

175 Chervon S.V. Chiral Cosmological Models: Dark Sector Fields Description // Quantum Matter. – 2013. – Vol. 2. – P. 71-82.

176 Paliathanasis A., Tsamparlis M. Two scalar field cosmology: Conservation laws and exact solutions // Physics Review D. – 2014. – Vol. 90. – P. 4-15.

177 Capozziello S., D'Agostino R., Giambò R. et al. Effective field description of the Anton-Schmidt cosmic fluid // Phys. Rev. D. – 2019. – Vol.99 P. 023532

178 Myrzakulov N. Stability of de Sitter solution in mimetic $f(R)$ gravity //

Journal of Physics: Conference Series. - 2015. - Vol. 633. - P. 012024.

179 Vakili B. Noether symmetric $f(R)$ quantum cosmology and its classical correlations // *Physics Letters B.* – 2008. – Vol. 669. – P. 206.

180 Gangopadhyay D., Mukherjee S. $f(R)$ Gravity with k -essence scaling relation and Cosmic acceleration // *arXiv:[1512.05341]*. 25.08.2022.

181 Nojiri S., Odintsov S.D. Mimetic $F(R)$ gravity: Inflation, dark energy and bounce // *Modern Physics Letters A.* – 2014. – Vol. 29. – P. 1450211.

182 Capozziello S., D’Agostino R., Luongo O. Cosmic acceleration from a single fluid description // *Physics of the Dark Universe.* – 2017. – Vol. 20. – P. 1-13.

183 Brevik I., Myrzakulov K., Zhadyranova A. et al. Viscous coupled fluids in terms of a log-corrected equation-of-state // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics.* – 2021. – Vol. 18, №12. – P. 2150198.

184 Chavanis P.H., Kumar S. Comparison between the logotropic and Λ CDM models at the cosmological scale // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics.* – 2017. – Vol. 5. – P. 37-1-37-33.

185 Nojiri S., Odintsov S., Tsujikawa S. Properties of singularities in the (phantom) dark energy universe // *Phys. Rev. D.* – 2005. – Vol. 71, №6. – P. 063004.

186 Bolotin Yu.L., Kostenko A., Lemets O.A. et al. Cosmological evolution with interaction between dark energy and dark matter // *Int. J. Mod. Phys. D.* – 2015. – Vol. 24. – P. 1530007.

187 Clifton T., Ferreira P.G., Padilla A. et al. Modified gravity and cosmology // *Phys. Rep.* – 2012. – Vol. 513. – P. 1-189.

188 Baudis L. Dark matter detection // *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics.* – 2016. – Vol. 43, №4. – P. 044001.

189 Appleby S.A., Battye R.A. Do consistent $F(R)$ models mimic General Relativity plus // *Phys. Lett. B.* – 2007. – Vol. 654. – P. 7-12.

190 Starobinsky A.A. Disappearing cosmological constant in $f(R)$ gravity // *JETP Lett.* – 2007. – Vol. 86. – P. 157-163.

191 Cai Y.F., Chen S.H., Dent J.B. et al. Matter bounce cosmology with the $f(T)$ gravity // *Class. Quantum Gravity.* – 2011. – Vol. 28. – P. 215011.

192 Dent J.B., Dutta S., Saridakis E.N. $f(T)$ gravity mimicking dynamical dark energy. Background and perturbation analysis // *JCAP.* – 2011. – Vol. 01. – P. 009.

193 Bamba K., Nashed G.G.L., Hanafy W. et al. Bounce inflation in $f(T)$ cosmology: a unified inflaton-quintessence field // *Phys. Rev. D.* – 2016. – Vol. 94. – P. 083513.

194 Bamba K., Odintsov S.D., Saridakis E.N. Inflationary cosmology in unimodular $F(T)$ gravity // *Mod. Phys. Lett. A.* – 2017. – Vol. 32, №21. – P. 1750114.

195 Ren X., Yan S.F., Zhao Y. et al. Gaussian processes and effective field theory of $f(T)$ gravity under the H_0 tension // *Astrophys. J.* – 2022. – Vol. 932. – P. 131-1-131-10.

196 Cai Y.F., Khurshudyan M., Saridakis E.N. Model-independent reconstruction of $f(T)$ gravity from Gaussian Processes // *Astrophys. J.* – 2020. – Vol. 888. – P. 62-1-62-10.

197 Aghanim N. et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters //

Astron. Astrophys. – 2020. – Vol. 641. – P. 1-73.

198 Riess A.G., Casertano S Yuan W. et al. Cosmic distances Calibrated to 1% Precision with Gaia EDR3 parallaxes and Hubble space telescope photometry of 75 Milky Way Cepheids Confirm Tension with Λ CDM // *Astrophys. J. Lett.* – 2021. – Vol. 908. – P. 1-21.

199 Elizalde E., Gluza J., Khurshudyan M. An approach to cold dark matter deviation and the H_0 tension problem by using machine learning // <https://www.semanticscholar.org/reader/>. 10.08.2022.

200 Wang D., Mota D. Can $f(T)$ gravity resolve the H_0 tension? // *Physical Review D.* – 2020. – Vol. 102. – P. 063530-1-063530-13.

201 Treu T. Strong lensing by galaxies // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics.* – 2010. – Vol. 48. – P. 87-125.

202 Suyu S.H., Bonvin V., Courbin F. et al. H0LiCOW-I. H_0 Lenses in COSMOSGRAIL's Wellspring: program overview // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2017. – Vol. 468, №3. – P. 2590-2604.

203 Wong K.C., Suyu S.H. et al. H0LiCOW-XIII. A 2.4 per cent measurement of H_0 from lensed quasars: 5.3σ tension between early- and late-Universe probes // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2020. – Vol. 498, №1. – P. 1420-1439.

204 Abbott B.P. et al. A gravitational-wave standard siren measurement of the Hubble constant // *Nature.* – 2017. – Vol. 551. – P. 85-88.

205 Abbott B.P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral // *Phys. Rev. Lett.* – 2017. – Vol. 119. – P. 161101

206 Ivezić Ž. et al. From Science Drivers to Reference Design and Anticipated Data Products // *The Astrophysical Journal.* – 2019. – Vol. 873. – P. 111-1-111-29.

207 Oguri M., Marshall P.J. Gravitationally lensed quasars and super-novae in future wide-field optical imaging surveys // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2010. – Vol. 405. – P. 2579-2593.

208 Aljaf M., Elizalde E., Zhadyranova A. et al. Solving the H_0 tension in $f(T)$ gravity through Bayesian machine learning // *The European Physical Journal C.* – 2022. – Vol. 82, №12. – P. 1130.

209 Schneider P., Ehlers J., Falco E.E. *Gravitational Lenses.* – Berlin: Springer, 1992. – 560 p.

210 Schneider P., Kochanek C.S., Wambsganss J. *Gravitational Lensing: Strong, Weak and Micro.* – Berlin: Springer, 2006. – 553 p.

211 Elizalde E., Khurshudyan M., Odintsov D. et al. Analysis of the H_0 tension problem in the Universe with viscous dark fluid // *Phys. Rev. D.* – 2020. – Vol. 102. – P. 123501.

212 Nunes R.C., Pan S., Saridakis E.N. New observational constraints on $f(T)$ gravity through gravitational-wave astronomy // *Phys. Rev. D.* – 2018. – Vol. 98 – P. 104055.

213 Kullback S., Leibler R.A. On information and sufficiency // *Annals of Mathematical Statistics.* – 1951. – Vol. 22. – P. 79-86.

214 Жадыранова А.А. Использование программного обеспечения Python в космологии // *Научный журнал «Доклады НАН РК»* -2023 – Т. 346, № 2. – С. 5–

18.

215 Бахрам А.Ж., Жадыранова А.А. Хаббл шиеленісін тұтқыр қара сұйықтықты қолданып шешу // XVIII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «GYLYM JANE BILIM - 2023» - 2023 - С. 72-76.

216 Өсербай Ж.Қ., Жадыранова А.А. F(T) модельдерінің фондық динамикасын зерттеу үшін Байес машиналық оқытуды қолдану // XVIII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «GYLYM JANE BILIM - 2023» -2023- С. 123-128.

217 Shapovalov A.V., Breev A.I. Vacuum quantum effects on Lie groups with bi-invariant metrics// Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. – 2018. – Vol. 15. – P. 1-28.

218 Петров А.З. Пространства Эйнштейна. – М.: Наука, 1961. – 495 с.

219 Обухов В. В. Интегрирование уравнений Гамильтона-Якоби и Максвелла в диагональных метриках Штеккелевых пространств// Известия вузов. Физика. – 2020. – Т. 63, №7. – С. 21-25.

220 Obukhov V.V. Hamilton–Jacobi Equation for a Charged Test Particle in the Stäckel Space of Type // Symmetry. – 2020. – Vol. 12, №8. – P. 1289-1-1289-15.

221 Obukhov V.V. Separation of variables in Hamilton-Jacobi and Klein-Gordon-Fock equations for a charged test particle in the stackel spaces of type (1.1) // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. – 2021. – Vol. 18, №3. – P. 2150033-1-2150033-15.

222 Magazev A.A. et al. Integrable magnetic geodesic flows on lie groups // Theor. Math. Phys. – 2008. – Vol. 156. – P. 1127-1141.

223 Obukhov V.V. Algebra of symmetry operators for Klein-Gordon-Fock Equation // Symmetry. – 2021. – Vol. 13, №4. – P. 727-1-727-15.

224 Magazev A. A. Constructing a Complete Integral of the Hamilton–Jacobi Equation on Pseudo-Riemannian Spaces with Simply Transitive Groups of Motions // Math. Phys. Anal. Geom. – 2021. – Vol. 24, №2. – P. 11-1-11-15.

225 Бреев А.И., Шаповалов А.В. Некоммутативная интегрируемость уравнений Клейна-Гордона и Дирака в (2+1)-мерном пространстве-времени // Известия вузов. Физика. – 2016. – Т. 59, №11. – С. 193-196.

226 Shapovalov A. Breev A. Non-Commutative Integration of the Dirac Equation in Homogeneous Spaces // Symmetry. – 2020. – Vol. 12. – P. 1867-1-1867-31.

227 Petrov A.Z. Einstein Spaces. – Oxford: Pergamon Press, 1969. – 496 p.

228 Obukhov V.V., Myrzakulov K.R., Guselnikova U.A., Zhadyranova A.A. Algebras of Symmetry Operators of the Klein–Gordon–Fock Equation for Groups Acting Transitively on Two-Dimensional Subspaces of a Space-Time Manifold // Russian Physics Journal.– 2021.–Vol. 64, №7.– P. 1320-1327.

229 Обухов В.В., Мырзакулов К., Жадыранова А. и др. Алгебры операторов симметрии уравнения Клейна-Гордона-Фока для групп движений, действующих транзитивно на двумерных подпространствах пространственно-временного многообразия // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2021. –Т. 64, №7. –С. 126-131.

230 Nojiri S., Odintsov S.D., Oikonomou V.K. F(R) Gravity with an axion-like particle: Dynamics, gravity waves, late and early-time phenomenology// Ann. Phys. –

2020. – Vol. 418. – P. 168186-1-168186-13.

231 Odintsov S.D., Oikonomou V.K. Aspects of axion F(R) gravity // EPL. – 2020. – Vol. 129, №4. – P. 40001-1-40001-7.

232 Capozziello S., De Laurentis M., Nojiri S. et al. Evolution of gravitons in accelerating cosmologies // Phys. Rev. D. – 2017. – Vol. 95, №8. – P. 083524.

233 Осетрин К. Е., Филиппов А. Е., Осетрин Е. К. Модели обобщенной скалярно-тензорной теорий гравитации с излучением, допускающие разделение переменных в уравнении Эйконала // Известия вузов. Физика. – 2018. – Т. 61, №8. – С. 17-23.

234 Osetrin E., Osetrin K. Pure radiation in space-time models that admit integration of the eikonal equation by the separation of variables method// J. Math. Phys. – 2017. – Vol. 58, №11. – P. 112504-1-112504-24.